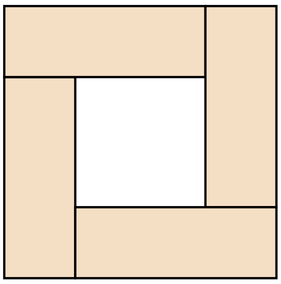
Kapitel VI, Abschlusstest

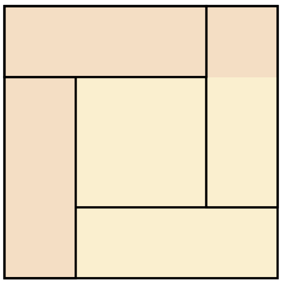
Seite 206

1

individuelle Lösung, z.B.:
a) zu Fig. 1: (I) $4b^2 + 4ab$; (II) $(a + 2b)^2 - a^2$
zu Fig. 2: (III) $4b(a + b)$; (IV) $2b(a + b) + 2ab$

Um die Äquivalenz der Terme (I) bis (IV) zu zeigen, werden alle Terme so weit wie möglich vereinfacht:
(I) $4b^2 + 4ab$ lässt sich nicht mehr weiter vereinfachen.
(II) $(a + 2b)^2 - a^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 - a^2 = 4b^2 + 4ab$ und ist damit äquivalent zu Term (I).
(III) $4b(a + b) = 4ab + 4b^2$ und ist damit äquivalent zu Term (I).
(IV) $2b(a + 2b) + 2ab = 2ab + 4b^2 + 2ab = 4ab + 4b^2$ und ist damit äquivalent zu Term (I).
Die Terme (I) bis (IV) sind also alle äquivalent zueinander.
b) Durch den Term $(a + b)(2b + a) - (ab + b^2)$ wird die gelb schraffierte Fläche beschrieben.

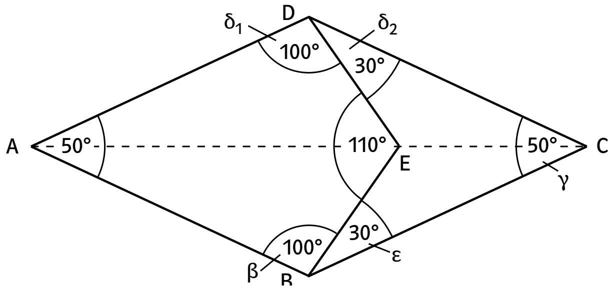




2

a) Haltungsnote Höllwarth: 19 + 19,5 + 19 = 57,5
Haltungsnote Späth: 18,5 + 18,5 + 18,5 = 55,5
b) individuelle Lösung, z.B.:
mögliche Wertung der fünf Sprungrichter für Hannawald mit der Haltungsnote 55 Punkte: 19,0; 18,5; 18,0; 17,0; 18,5.
c) Pettersen: (18 + 17,5 + 18,5 + 17 + 18,5) : 5 = 17,9
Höllwarth: (19,5 + 19 + 19 + 19,519) : 5 = 19,2
d) Pettersen: 74,4 Punkte,
denn er sprang 123 m = 115 m + 8 m; also erhielt er 60 Punkte + 8 · 1,8 Punkte = 74,4 Punkte für seine Sprungweite.
Hannawald: 54,6 Punkte,
denn er sprang 112 m = 115 m − 3 m; also erhielt er 60 Punkte −3 · 1,8 Punkte = 54,6 Punkte für seine Sprungweite.
e) Sind P die Punkte und x die Sprungweite, dann gilt:
$P(x) = 60 + 1{,}8(x - 115)$.
Am Beispiel aus d):
$P(123) = 60 + 1{,}8(123 - 115) = 74{,}4$ und
$P(112) = 60 + 1{,}8(112 - 115) = 54{,}6$

3



Zunächst einmal werden β und δ_1 bestimmt. Da die Strecke durch A und E die Symmetrieachse des Drachens ist, müssen β und δ_1 gleich sein. Da außerdem die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt, muss gelten:
$\beta = \delta_1 = (360° - 110° - 50°) : 2 = 100°$.
Da das Viereck ABCD eine Raute ist und in einer Raute die gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind, beträgt $\gamma = 50°$. Außerdem muss dann $\delta_2 = \varepsilon$ gelten, weil sonst die anderen beiden gegenüberliegenden Winkel der Raute nicht gleich wären.
Da die Winkelsumme der Raute ABCD 360° beträgt, muss gelten:
$\varepsilon = \delta_2 = (360° - 2 \cdot 100° - 2 \cdot 50°) : 2 = 60° : 2 = 30°$.
Der gesuchte Winkel ε beträgt also 30°.

4

individuelle Lösung, z. B.:
Antwort: Man benötigt etwa 25 Schüler.
Begründung: Zunächst einmal wird das Gewicht des Turms bestimmt: Da ein Legostein 2,75 g wiegt und insgesamt 304 756 Legosteine benutzt wurden, wiegt der Turm:
2,75 g · 304 756 = 838 079 g = 838,079 kg.
Da ein Kind in der achten Klasse etwa 20 bis 60 kg tragen kann, rechnet man:
838,079 kg : 20 kg ≈ 42 und 838,079 kg : 60 kg ≈ 14.
D.h., dass man zwischen 14 und 42 Schüler zum Tragen des Turmes oder der Legosteine (den Turm mit über 21 m Höhe kann man so natürlich nicht tragen!) benötigt.
Die dafür getroffenen Voraussetzungen waren, dass ein Achtklässler zwischen 20 und 60 kg tragen kann. Werden andere Annahmen getroffen, ändert sich das Ergebnis entsprechend.

Seite 207

5

a) Ja, die Zuordnung „Flächeninhalt des Rechtecks $\longrightarrow$ Gewicht“ ist eine proportionale Zuordnung, denn verdoppelt sich z. B. die Größe der Rechtecks, muss das neue Rechteck natürlich auch das Doppelte wiegen, da es ja aus der gleichen Pappe sein soll und deshalb pro Flächeneinheit das gleiche Gewicht haben sollte.

b) Die Punkte liegen nicht exakt auf einer Geraden, da die Rechtecke wahrscheinlich nicht exakt ausgeschnitten wurden, vielleicht auch die Seitenlängen nicht exakt ausgemessen wurden und wahrscheinlich die Gewichte nicht exakt gewogen wurden, so dass kleinere Abweichungen der Messwerte von der Geraden auftreten.

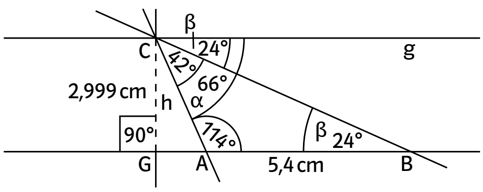
c) Aus dem Graphen lässt sich der Punkt (65 | 3) ablesen.
Da es sich um eine Ursprungsgerade handelt, muss sie die Gleichung $y = \left(\frac{3}{65}\right)x$ besitzen, wobei x der Rechtecksfläche und y dem zugehörigen Gewicht entspricht.
Also $y = \left(\frac{3}{65}\right) \cdot 10\,000 = \left(\frac{30\,000}{65}\right) \approx 461{,}5$, da $1\,m^2 = 10\,000\,cm^2$.
Ein $1\,m^2$ großes Rechteck müsste also ungefähr 462 g wiegen.

d) Ansatz: $y = 1200 = \left(\frac{3}{65}\right)x$
$\Longrightarrow x = 26\,000$
Also ist ein 1200 g schweres Rechteck ungefähr $26\,000\,cm^2 = 2{,}6\,m^2$ groß.

6

Es wird der Maßstab 1 : 50 000 gewählt. Mithilfe der gegebenen Winkel werden die Innenwinkel des Dreiecks bestimmt:
CBA = 24°, da Wechselwinkel zum Winkel β.
∢ ACB = 42°, da 66° − 24° = 42°.
∢ BAC = 114°, da 180° − 42° − 24° = 114°.

Jetzt wird das Dreieck ABC maßstabsgerecht konstruiert und die Höhe h zur Seite a gemessen:



h ≈ 3 cm ≙ 1500 m
Der Ballon schwebt etwa 1500 m über dem Punkt G.

7

a) Schätzung A passt zu der Sechskantmutter, da es wahrscheinlicher ist, mit der Mutter eine 1 oder 8 zu würfeln als eine der anderen Zahlen, da die Fläche der 1 und der 8 gleich groß und größer als alle anderen Flächen sind.

b) *Schätzung A:* Ungerade sind die Zahlen: 1, 3, 5 und 7, also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine ungerade Zahl zu würfeln: 0,35 + 0,05 + 0,05 + 0,05 = 0,5.
Würfelt man dreimal ergibt sich: $P = 0{,}5^3 = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$.
Schätzung B: Auch hier ist die Wahrscheinlichkeit für „ungerade“ 0,5, also ist die Wahrscheinlichkeit für „dreimal ungerade“ in drei Würfel ebenfalls 12,5 %.

8

individuelle Lösung, z.B.:
Rasenfläche: $15\,m \cdot 8\,m = 120\,m^2$
Die Fläche des Bartes muss geschätzt bzw. gemessen werden: Werte zwischen $150\,cm^2$ und $220\,cm^2$ sind realistisch.
Sei die Bartfläche von Herrn Barth etwa $200\,cm^2$.
Berechnung der Anzahl der Tage:
$120\,m^2 : 200\,cm^2 = 1\,200\,000\,cm^2 : 200\,cm^2 = 6000$
Herr Barth rasiert sich also schon seit etwa 6000 Tagen ≈ 16,44 Jahre, also 16 Jahre und 160 Tage. Da Herr Barth sich ab dem 17. Lebensjahr rasiert, ist er heute etwa 17 + 16 = 33 Jahre und 160 Tage alt.

9

a) 81 kg
b) Da ein BMI zwischen 20 und 25 optimal ist, sollte man mit einer Körpergröße von 1,65 m mindestens 55 kg und höchstens 68 kg wiegen. Da auch ein BMI von 30 noch gesund ist, sollte man mit dieser Körpergröße maximal 82 kg wiegen.
c) Paul könnte zwischen 1,87 cm und 1,68 cm groß sein, damit sein BMI zwischen 20 und 25 liegt und damit optimal ist.

Seite 208

10

a) Gegeben: Prozentsatz p und Prozentwert W
Gesucht: Grundwert $G = \frac{W}{p}$
Gerundet erhält man die folgenden Ergebnisse:

Speise	L	S	P	Ki	Ko	M	V
Mann	213	274	567	607	773	2429	8500
Frau	175	226	467	500	636	2000	7000

b) Gegeben: p und G, gesucht: $W = p \cdot G$
Der Fettgehalt des angegebenen Menüs beträgt also:
$0{,}15 \cdot 250\,g + 0{,}11 \cdot 180\,g + 0{,}035 \cdot 400\,g = 71{,}3\,g$
Es bleiben höchstens noch $85\,g - 71{,}3\,g = 13{,}7\,g$ Fett, die Herr Paulus an diesem Tag essen dürfte.
Berechnung der Schokoladenmenge:
Gegeben: p, W, gesucht: $G = \frac{W}{p}$
Die Schokoladenmenge beträgt also: 13,7 : 0,31 ≈ 44 g.

11

a) Wahr, das Maximum des Graphen liegt bei 54 % und das Minimum bei 41.
b) Wahr, denn zum Jahr 1979 rauchten 40 % = 0,4 = $\frac{2}{5}$ der Mädchen.
c) Falsch, denn das Minimum des Graphen der Mädchen liegt bei 36 % im Jahre 1993.
d) Falsch, im Jahre 1973 waren es 47 % Mädchen, die rauchten und im Jahre 1993 nur 36 %, aber nicht 23,5 %, was der Hälfte des Anteils von 1973 entsprechen würde.
e) Wahr, der Anteil der Jungen und der Mädchen stieg im Jahre 1982 und auch im Jahre 1993 an.
f) Wahr, der Graph der Jungen liegt in jedem Jahr über dem Graphen der Mädchen.
g) Falsch, der Anteil der rauchenden Jungen war im Jahre 1993 mit 41 % am geringsten.
h) Wahr, denn zunächst einmal stieg zwar der Anteil der rauchenden Mädchen bis 1986 und fiel dann bis 1993 stark ab. Im Zeitraum von 1989 bis 1993 hörten also viele Mädchen mit dem Rauchen auf, wenn man davon ausgeht, dass die Gesamtanzahl der Mädchen in Deutschland sich in diesem Zeitraum nicht wesentlich veränderte.
i) Falsch, 1986 rauchten 46 % der Jungen wohingegen 1992 nur 42 % der Jungen rauchten.

12

a) Gegeben: p = 2,5 % = 0,025; G = 5000 €
Gesucht: Zinsen Z = G · p
Also Z = G · p = 5000 € · 0,025 = 125 €
Antwort: Nach einem Jahr beträgt das Guthaben 5000 € + 125 € = 5125 €.
b) Jahreszinsen Z = 125 €. Also betragen die Zinsen für ein halbes Jahr 125 € : 2 = 62,50 €.
Antwort: Nach einem halben Jahr kann er also über einen Betrag von 5062,50 € verfügen.
c) Wenn die Zinsen mitverzinst werden, hat Paul nach drei Jahren ein Kapital von
$K = (1 + p)^x \cdot G = (1 + 0{,}025)^3 \cdot 5000\,€ \approx 5384{,}45\,€$
auf dem Konto.

13

individuelle Lösung, z. B.:
In jeder Ähre befinden sich etwa 30 bis 50 Roggenkörner und auf einem Quadratmeter Feld wachsen etwa 400 bis 800 Halme. Ein Hektar entspricht 10 000 Quadratmetern, also kann man pro ha etwa 40 · 600 · 10 000 = 240 000 000 Roggenkörner ernten.
Da 100 Roggenkörner etwa 3 g wiegen,
wiegen die Roggenkörner eines 1 ha großen Feldes etwa 7 200 000 g = 7200 kg = 7,2 t.
Da ein Roggenbrot etwa 1 kg wiegt und aus etwa 500 g Roggenmehl hergestellt wird, kann man etwa 14 400 Brote aus dem Korn eines 1 ha großen Feldes machen. Werte zwischen 7200 und 24 000 Broten werden als Lösung akzeptiert.

Seite 209

14

1 kg Reis nimmt ungefähr ein Volumen V = 1140 cm³ ein.
Da bis zu 15 % Luft in einer Schachtel erlaubt sind, darf das maximale Schachtelvolumen $V_{max} = 1140\,cm^3 \cdot 1{,}15 = 1311\,cm^3$ betragen.

Volumen Schachtel 1 (unten links):
$V = G \cdot h = 0{,}5 \cdot 26\,cm \cdot 10\,cm \cdot 12\,cm = 1560\,cm^3$.
Diese Schachtel ist also zu groß.

Volumen Schachtel 2 (unten rechts):
$V = G \cdot h$
$= (0{,}5 \cdot 20\,cm \cdot 25\,cm + 20\,cm \cdot 7\,cm) \cdot 8\,cm$
$= (250\,cm^2 + 140\,cm^2) \cdot 8\,cm$
$= 390\,cm^2 \cdot 8\,cm$
$= 3120\,cm^3$.
Diese Schachtel ist also viel zu groß.

Volumen Schachtel 3 (oben rechts):
$V = V_{Z1} - V_{Z2} = G_1 \cdot h - G_2 \cdot h$
$= \pi(9{,}5\,cm)^2 \cdot 8\,cm - \pi(9{,}5\,cm - 4{,}5\,cm)^2 \cdot 8\,cm$
$\approx 1639{,}9\,cm^3$
Die Schachtel ist also ebenfalls zu groß.

Volumen Schachtel 4 (oben links):
$V = G \cdot h$
$= (0{,}5 \cdot 6\,cm \cdot (16\,cm - 8\,cm) \cdot 0{,}5 \cdot 2 + 8\,cm \cdot 6\,cm) \cdot 13\,cm$
$= (24\,cm^2 + 48\,cm^2) \cdot 13\,cm$
$= 72\,cm^2 \cdot 13\,cm$
$= 936\,cm^3$.
Die Schachtel ist also erlaubt.

b) Die Oberflächen der Körper 1 – 4 werden bestimmt. Alle Längen sind in cm angegeben.

Oberfläche 1 (unten links):
$O = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 2 + 12 \cdot 27{,}9 + 12 \cdot 26 + 10 \cdot 12 = 1026{,}8$
Ohne Klebekanten werden also 1026,8 cm² Material benötigt.

Oberfläche 2 (unten rechts):
$O = (0{,}5 \cdot 20 \cdot 25 + 20 \cdot 7) \cdot 2 + 27 \cdot 8 \cdot 2 + 7 \cdot 8 \cdot 2 + 20 \cdot 8$
$= 1484$
Ohne Klebekanten werden also 1484 cm² Material benötigt.

Oberfläche 3 (oben rechts):
$O = 2 \cdot \pi \cdot 9{,}5 \cdot 8 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 8 + 2(\pi \cdot 9{,}5^2 - \pi \cdot 5^2) \approx 1138{,}8$
Ohne Klebekanten werden also etwa 1138,8 cm² Material benötigt.

Oberfläche 4 (oben links):
$O = 2(0{,}5 \cdot 6 \cdot (16 - 8) \cdot 0{,}5 \cdot 2 + 8 \cdot 6) + 4 \cdot 13 \cdot 5 + 2 \cdot 13 \cdot 8$
$= 612$
Ohne Klebekanten werden also 612 cm² Material benötigt.
Für die vierte Verpackung wurde also am wenigsten Material benötigt.

15

a) Monatliche Gesamtkosten $y = ax + c$, wobei c die Festkosten, x die Anzahl der gefahrenen Kilometer und a die Kraftstoffkosten pro Kilometer sind.

I: $307{,}70 = a \cdot 960 + c$

II: $330{,}10 = a \cdot 1240 + c$

Gleichung I nach c auflösen:

I: $307{,}70 = a \cdot 960 + c \qquad | -a \cdot 960$

Ia: $c = 307{,}70 - a \cdot 960$

Ia in II einsetzen:

$330{,}10 = a \cdot 1240 + 307{,}70 - a \cdot 960$

$330{,}10 = 307{,}70 + 280 \cdot a \qquad | -307{,}70$

$280a = 22{,}4$

$a = 0{,}08$

$a = 0{,}08$ in Ia einsetzen:

$c = 307{,}70 - 0{,}08 \cdot 960$

$c = 230{,}90$

Bei der Dieselversion kostet der Kraftstoff pro Kilometer 0,08 €. (Die Festkosten betragen im Monat 230,90 €.)

b) Benzinversion: $y = 0{,}12x + 190{,}95$

Dieselversion: $y = 0{,}08x + 230{,}90$

(x sind hierbei die gefahrenen Kilometer und y die monatlichen Gesamtkosten)

Zur Kontrolle der zeichnerischen Lösung benutze den Funktionsplotter auf der Begleit-CD.

c) Aus der Zeichnung lässt sich entnehmen, dass es sich ab etwa 1000 km pro Monat lohnt, die Dieselversion zu nehmen, da dort der Schnittpunkt der beiden Graphen ist und ab da die Dieselversion billiger wird.

Rechnerisch:

Die Gleichungen aus b) werden gleichgesetzt:

$0{,}12x + 190{,}95 = 0{,}08x + 230{,}90 \qquad | -0{,}08x$

$0{,}04x + 190{,}95 = 230{,}9 \qquad | -190{,}95$

$0{,}04x = 39{,}95 \qquad | :0{,}04$

$x = 998{,}75$

Die Familie Hartung muss monatlich 998,75 km fahren, damit sich die Dieselversion lohnt.

16

Sei t die Anzahl der Treffer und n die Anzahl der Nieten in der Lostrommel mit insgesamt $t + n$ Losen.

a) Die Gewinnwahrscheinlichkeit ändert sich von $t : (t + n)$ auf $t : (t + 2n)$, verkleinert sich also um das $(t + n) : (t + 2n)$ -fache.

Beispiel: 2 Treffer, 8 Nieten

$p_1 = \frac{2}{10} = 0{,}2$ und $p_2 = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$ (das $\frac{5}{9}$-fache der Gewinnwahrscheinlichkeit 1).

b) Die Gewinnwahrscheinlichkeit ändert sich von $t : (t + n)$ auf $2t : (2t + n)$, vergrößert sich also um das $(2t : (2t + n)) : (t : (t + n))$-fache.

Beispiel: 2 Treffer, 8 Nieten

$p_1 = \frac{2}{10} = 0{,}2$ und $p_2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (das $\frac{5}{3}$-fache der Gewinnwahrscheinlichkeit 1).

c) Die Trefferwahrscheinlichkeit ändert sich nicht, denn $t : (t + n) = 2t : (2t + 2n) = 2t : (2(t + n))$.

Beispiel: 2 Treffer, 8 Nieten

$p_1 = \frac{2}{10} = 0{,}2$ und $p_2 = \frac{4}{20} = 0{,}2$

Die Trefferwahrscheinlichkeit ändert sich also nicht.

17

individuelle Lösung, z. B.:

Der Radius der Schnurschnecke ist etwa 3,5 cm. Die Schnecke besteht aus sechs „Kreisen". Der kleinste Kreis hat etwa den Radius $r_1 \approx 0{,}6$ der danach $r_2 \approx 1{,}2$, anschließend $r_3 \approx 1{,}8$, $r_4 \approx 2{,}4$, $r_5 \approx 3$ und $r_6 \approx 3{,}6$.

Nun werden die Umfänge der sechs „Kreise" berechnet und anschließend addiert um die ungefähre Länge der Schnur zu bestimmen.

$U_1 \approx 2\pi \cdot 0{,}6 \approx 3{,}8$

$U_2 \approx 2\pi \cdot 1{,}2 \approx 7{,}5$

$U_3 \approx 2\pi \cdot 1{,}8 \approx 11{,}3$

$U_4 \approx 2\pi \cdot 2{,}4 \approx 15{,}1$

$U_5 \approx 2\pi \cdot 3{,}0 \approx 18{,}8$

$U_6 \approx 2\pi \cdot 3{,}6 \approx 22{,}6$

Also ist die Gesamtlänge der Schnur etwa 79,1 cm. Werte zwischen 60 cm und 100 cm sind akzeptabel.

Teste dich selbst – Lösungen

Rechnen mit Zahlen und Variablen

1 Terme

a) falsch – Die Ausdrücke $5x$ und 2 sind nicht gleichartig und dürfen daher nicht zusammengefasst werden. Der Ausdruck $5x - 2$ lässt sich also nicht weiter vereinfachen.
b) richtig – Man muss den Term in Beziehung zur Fläche setzen und so **argumentieren**: Die blaue Fläche ist ein Rechteck mit der Breite $a - b$ und der Höhe $c + d$. Damit ergibt sich die Fläche A = Breite · Höhe = $(a - b) \cdot (c + d)$.
c) richtig – Nun muss man so **argumentieren**: Die blaue Fläche erhält man, indem man von der Fläche des großen Rechtecks mit den Seitenlängen a und $d + c$ die beiden gelben Rechtecke mit den Seitenlängen b und d bzw. b und c subtrahiert: $A = a \cdot (d + c) - b \cdot d - b \cdot c$.
d) falsch – Hier **argumentiert** man mit den Rechenregeln: Das Quadrat aus einer Differenz ist nicht gleich der Differenz der Quadrate. Hier muss die 2. binomische Formel angewendet werden: $(3 - x)^2 = 9 - 6x + x^2$.
e) falsch – Die Ausdrücke a^2 und a haben verschiedene Exponenten und sind daher nicht gleichartig, können also nicht zusammengefasst werden.
f) falsch – Es gilt „Punktrechnung vor Strichrechnung", daher muss zunächst der Term $x \cdot 4x$ berechnet werden. Man erhält mit $x \cdot 4x = 4x^2$ und $9x$ eine Summe nicht gleichartiger Terme, die sich nicht weiter zusammenfassen lässt.
g) falsch – Man **argumentiert** mit den Rechenregeln für Wurzeln: Die Wurzel aus einer Summe ist nicht gleich der Summe der Wurzeln: $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Es darf also nicht für jeden Summanden unter dem Wurzelzeichen die Regel $\sqrt{a^2} = a$ bzw. $\sqrt{b^2} = b$ angewendet werden. Der Term $\sqrt{a^2 + b^2}$ lässt sich nicht weiter vereinfachen.
h) richtig – Mit Wurzeln rechnet man wie mit reellen Zahlen, mithilfe des Distributivgesetzes erhält man:
$5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (5 - 2) \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
i) richtig – Durch die Erweiterung des Bruches mit $\sqrt{2}$ lässt sich der Nenner „rational machen" und der Bruch kürzen: $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{2} = \sqrt{2}$.

2 Gleichungen

a) falsch – Durch Äquivalenzumformungen erhält man:

$$\begin{aligned} 0{,}5 + (2 - x) &= 1 - (1 + x) && |\text{ Klammern auflösen} \\ 0{,}5 + 2 - x &= 1 - 1 - x && |\text{ zusammenfassen} \\ 2{,}5 - x &= -x && |\ +x \\ 2{,}5 &= 0 \text{ (falsch)} \end{aligned}$$

Die Gleichung hat keine Lösung. Man kann auch mit der Einsetzprobe **argumentieren**: Sie bestätigt, dass -2 keine Lösung ist: $0{,}5 + (2 - (-2)) = 1 - (1 + (-2))$
$4{,}5 = 2$ (falsch)

b) richtig – Durch Äquivalenzumformungen erhält man:

$$\begin{aligned} 4(y + 5) &= 9y + 5 && |\text{ Klammer auflösen} \\ 4y + 20 &= 9y + 5 && |\ -20 \\ 4y &= 9y - 15 && |\ -9y \\ -5y &= -15 && |\ :(-5) \\ y &= 3 \end{aligned}$$

3 ist ein Teiler von 15.
c) richtig – Durch Äquivalenzumformungen erhält man:

$$\begin{aligned} x - (x - 7)(x + 7) &= 50 - x^2 && |\text{ Klammern ausmultiplizieren} \\ x - (x^2 - 49) &= 50 - x^2 && |\text{ Klammer auflösen} \\ x - x^2 + 49 &= 50 - x^2 && |\ +x^2 \\ x + 49 &= 50 && |\ -49 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

1 ist eine einstellige Quadratzahl.
d) richtig – Durch Äquivalenzumformungen erhält man:

$$\begin{aligned} (8 - z)(2 + z) &= (7 - z)(z + 1) && |\text{ Klammern ausmultiplizieren} \\ 16 + 8z - 2z - z^2 &= 7z + 7 - z^2 - z && |\text{ zusammenfassen} \\ 16 + 6z - z^2 &= 6z + 7 - z^2 && |\ +z^2 \\ 16 + 6z &= 6z + 7 && |\ -6z \\ 16 &= 7 \text{ (falsch)} \end{aligned}$$

e) falsch – Die Situation muss in ein **mathematisches Modell**, hier in einen Term, übersetzt werden: Wenn es 15-mal so viele Schüler wie Lehrer gibt, muss man die Anzahl der Lehrer mit 15 multiplizieren, um auf die Anzahl der Schüler zu kommen, es gilt also: $S = 15 \cdot L$.
Eine einfache Zahlenprobe bestätigt dies: Für $L = 5$ und $S = 75$ gilt: $75 = 15 \cdot 5$ (wahr).
f) falsch – Man kann mit den bei Gleichungen erlaubten Operationen und einem Beispiel **argumentieren**: Das Multiplizieren beider Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl stellt eine Äquivalenzumformung dar, bei der die Lösung der Gleichung unverändert bleibt. Multipliziert man z. B. die Gleichung $x = 10$ mit 4, so erhält man $4x = 40$; auch diese Gleichung hat die Lösung $x = 10$.

3 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

a) falsch – Zur **Lösung** dieses **Problems** wählt man am besten das Additionsverfahren aus:

$$\begin{aligned} \text{I} + \text{II:}\quad -3y &= 23 + y + 13 && |\text{ zusammenfassen} \\ -3y &= 36 + y && |\ -y \\ -4y &= 36 && |\ :(-4) \\ y &= -9 \end{aligned}$$

Das Einsetzen von $y = -9$ in II liefert:

$$\begin{aligned} -2x &= -9 + 13 && |\text{ zusammenfassen} \\ -2x &= 4 && |\ :(-2) \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet also $x = -2$ und $y = -9$.
Man kann auch mit der Einsetzprobe **argumentieren**:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 9 &= 23 && |\text{ zusammenfassen} \\ -31 &= 23 \text{ (falsch)} \end{aligned}$$

Also kann $x = -2$ und $y = 9$ keine Lösung sein.

b) richtig – Bei der **Lösung** dieses **Problems** muss man die geometrische und die algebraische Darstellung von Geraden betrachten und so **argumentieren**: Hat man ein LGS mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen, so lassen sich die Gleichungen als Geraden darstellen und ihr Schnittpunkt ist die Lösung des LGS. Bei einer unterschiedlichen Steigung sind die beiden Geraden nicht parallel, sie haben also genau einen Schnittpunkt. Damit hat das zugehörige LGS genau eine Lösung.

c) richtig – Zur **Lösung** dieses **Problems** wählt man am besten das Einsetzungsverfahren: Mit dem Auflösen von II nach x erhält man:

I: $2y = 6 - 5x$

IIa: $x = 4{,}5 - 1{,}5y$

Das Einsetzen von IIa in I liefert:

$$
\begin{aligned}
2y &= 6 - 5(4{,}5 - 1{,}5y) && |\text{ Klammer auflösen}\\
2y &= 6 - 22{,}5 + 7{,}5y && |\text{ zusammenfassen}\\
2y &= -16{,}5 + 7{,}5y && |\ -7{,}5y\\
-5{,}5y &= -16{,}5 && |\ :(-5{,}5)\\
y &= 3
\end{aligned}
$$

Das Einsetzen von $y = 3$ in II liefert:

$$
\begin{aligned}
2x &= 9 - 3 \cdot 3 && |\text{ zusammenfassen}\\
2x &= 0 && |\ :2\\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Die Lösung lautet $x = 0$ und $y = 3$, damit gilt: $x + y = 3$.

d) richtig – Man kann dieses **Problem lösen**, indem man zeigt, dass die Gleichungen die dargestellten Geraden beschreiben. Löst man die Gleichungen I und II nach y auf, erhält man zwei Geradengleichungen:

I: $y = 0{,}3 - 0{,}7x$; $m = -0{,}7$ und $n = 0{,}3$

II: $y = 0{,}6 - 0{,}4x$; $m = -0{,}4$ und $n = 0{,}6$

Mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens erhält man den Schnittpunkt der Geraden bzw. die Lösung des LGS:

$$
\begin{aligned}
\text{I = II:}\quad 0{,}3 - 0{,}7x &= 0{,}6 - 0{,}4x && |\ +0{,}4x\\
0{,}3 - 0{,}3x &= 0{,}6 && |\ -0{,}3\\
-0{,}3x &= 0{,}3 && |\ :(-0{,}3)\\
x &= -1
\end{aligned}
$$

Das Einsetzen von $x = -1$ in I liefert: $y = 0{,}3 + 0{,}7 = 1$.

Aus Fig. 1 kann man neben dem Schnittpunkt $(-1\,|\,1)$ der Geraden jeweils für jede Gerade zwei Punkte ablesen und daraus die Steigung berechnen:

Gerade 1:

$P_1(-1\,|\,1)$ und $P_2(4\,|\,-2{,}5)$; $m = \frac{-2{,}5 - 1}{4 - (-1)} = -\frac{7}{10}$

Gerade 2:

$Q_1(-1\,|\,1)$ und $Q_2(4\,|\,-1)$; $m = \frac{-1 - 1}{4 - (-1)} = -\frac{4}{10}$

Nun **argumentiert** man: Da die in Fig. 1 und die durch die Gleichungen I und II dargestellten Geraden dieselbe Steigung und denselben Schnittpunkt besitzen, ist Fig. 1 eine Darstellung des LGS mit den Gleichungen I und II.

e) falsch – Bei der **Lösung** dieses **Problems** kann man geschickt **argumentieren**, indem man die geometrische Darstellung eines LGS betrachtet und zur algebraischen in Beziehung setzt: Ein LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten lässt sich in einem Koordinatensystem durch zwei Geraden darstellen, wobei die gemeinsamen Punkte der Geraden Lösungen des LGS sind. Zwei Geraden können sich entweder in einem Punkt schneiden (genau eine Lösung – im LGS: „$x = a$; $y = b$"), sie können identisch sein (unendlich viele Lösungen – im LGS: allgemeine wahre Aussage, z. B. „$0 = 0$"), sie können aber auch parallel zueinander liegen (keine Lösung – im LGS: allgemeine falsche Aussage, z. B. „$0 = 5$").

f) richtig – Hier kann man geschickt mit der geometrischen Darstellung eines LGS **argumentieren**: Bei I und II handelt es sich um zwei Geraden, die beide durch den Punkt $(0\,|\,-5)$ verlaufen $(n = -5)$ und nur diesen Punkt als Schnittpunkt besitzen, da sie verschiedene Steigungen haben. Damit ist $(0\,|\,-5)$ die einzige Lösung des LGS.

g) falsch – Hier **argumentiert** man so: Es ist zwar richtig, dass sich drei Geraden zweimal schneiden können; Lösung des zugehörigen LGS kann jedoch nur ein Punkt sein, in dem sich alle drei Geraden schneiden, da alle drei durch die (Geraden-)Gleichungen dargestellten Beziehungen für x und y (gleichzeitig!) erfüllt sein müssen.

4 Zahlenbereiche

a) falsch – Hier **argumentiert** man mit einem Gegenbeispiel: Periodische Dezimalzahlen besitzen unendlich viele Nachkommastellen, lassen sich jedoch als Bruch darstellen und sind daher rational, z. B.: $\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\,333\,\ldots$

b) richtig – Man **argumentiert**: Wenn der Nenner ein Teiler des Zählers ist, dann ist der Zähler ein Vielfaches des Nenners und der Bruch lässt sich vollständig kürzen; man erhält eine ganze Zahl, z. B.: $\frac{999}{3} = \frac{3 \cdot 333}{3} = 333$.

c) richtig – Hier **argumentiert** man mit Rechenregeln: Wegen der Regel „Minus mal Minus ergibt Plus" ist das Produkt einer geraden Anzahl negativer Zahlen immer positiv; damit ist das Produkt einer ungeraden Anzahl (z. B. 789) negativer Zahlen stets negativ, denn „Minus mal Plus ergibt Minus".

d) richtig – Hier muss man in mehreren Schritten **argumentieren**: Bei einem echten Bruch ist der Zähler kleiner als der Nenner, der Wert des Bruches ist also kleiner als 1. Das Produkt zweier Zahlen, die kleiner sind als 1, ist in jedem Fall wieder kleiner als 1. Dadurch bleibt der Zähler, auch wenn man kürzen kann, stets kleiner als der Nenner. Das Ergebnis ist also ein echter Bruch.

e) falsch – Man **argumentiert** mit einem Gegenbeispiel: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, und $\sqrt{6}$ sind irrational,

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$ jedoch rational.

Funktionen

5 Prozent- und Zinsrechnung

a) richtig – $\frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\,\%$ $(0{,}01 = 1\,\%)$.
b) richtig – $G = 12700$; $p = 7\,\%$. Damit gilt:
$W = p \cdot G = 7\,\% \cdot 12700 = 0{,}07 \cdot 12700 = 889$.
c) falsch – $W = 49{,}00$; $p = 100\,\% - 30\,\% = 70\,\%$. Damit gilt:
$G = \frac{W}{p} = \frac{49}{70\,\%} = \frac{49}{0{,}7} = 49 \cdot \frac{10}{7} = 70$. Die Hose hat also zuvor 70 Euro und nicht 69 Euro gekostet.
d) falsch – $W = 84{,}49$; $p = 100\,\% + 19\,\% = 119\,\%$. Damit gilt:
$G = \frac{W}{p} = \frac{84{,}49}{119\,\%} = \frac{84{,}49}{1{,}19} = 71$. Der MP3-Player kostet ohne Mehrwertsteuer 71,00 Euro, nicht 68,44 Euro.
e) falsch – $G = 4500$; $p = 3\,\%$; $t = 4 \cdot 30 = 120$. Man berechnet zunächst die Jahreszinsen W:
$W = p \cdot G = 3\,\% \cdot 4500 = 0{,}03 \cdot 4500 = 135$. Für 4 Monate erhält man $135 \cdot \frac{120}{360} = 135 \cdot \frac{1}{3} = 45$ Euro Zinsen. Damit erhält man 4500 Euro + 45 Euro = 4545 Euro ausbezahlt.
f) falsch – $G = x$; $p_A = 2\,\%$; $p_B = 4\,\%$; $t = 10$;
Bank A: Kapital: $K_A = (1 + p_A)^t \cdot G = 1{,}02^{10} \cdot x \approx 1{,}219\,x$
Zinsen: $K_A - G = 1{,}219\,x - x = 0{,}219\,x$
Bank B: Kapital: $K_B = (1 + p_B)^t \cdot G = 1{,}04^{10} \cdot x \approx 1{,}480\,x$
Zinsen: $K_B - G = 1{,}480\,x - x = 0{,}480\,x$
$0{,}480\,x : 0{,}219\,x \approx 2{,}2 > 2$
Bei der Bank B erhält man wegen des Zinseszinseffekts mehr als doppelt so viele Zinsen wie bei der Bank A.

6 Zuordnungen

a) richtig – Man ordnet der Situation zunächst das richtige **mathematische Modell** zu: Die Zuordnung *Liter (= Anzahl der Milchtüten)* → *Preis* ist proportional, man kann daher mit folgendem Dreisatz rechnen:

: 3	3 Liter	1,77 Euro	: 3
· 5	1 Liter	0,59 Euro	· 5
	5 Liter	2,95 Euro	

Fünf Liter Milch kosten also 2,95 Euro.
b) falsch – Hier **argumentiert** man mithilfe folgender Plausibilitätsüberlegung: Da die Dauer des Stücks nicht von der Anzahl der Musiker abhängt, handelt es sich nicht um eine antiproportionale Zuordnung, der Dreisatz kann hier also nicht angewendet werden.
c) falsch – Man ordnet der Situation zunächst das richtige **mathematische Modell** zu: Die Zuordnung *Anzahl der Pferde* → *Anzahl der Tage* ist antiproportional, es kann daher mit folgendem Dreisatz gerechnet werden:

: 12	12 Pferde	6 Tage	· 12
· 8	1 Pferd	72 Tage	: 8
	8 Pferde	9 Tage	

Für 8 Pferde reicht der Vorrat also nur 9, nicht 10 Tage.
d) falsch – Man **argumentiert**: Ein dickeres Buch kostet zwar in der Regel mehr. Damit die Zuordnung proportional ist, müsste jedoch immer gelten, dass ein Buch mit doppelter, dreifacher etc. Dicke auch den doppelten, dreifachen etc. Preis kostet. Dies ist nicht der Fall.
e) falsch – Man **argumentiert**: Der Graph einer proportionalen Zuordnung verläuft stets durch den Ursprung, hat also den Achsenabschnitt $n = 0$. Eine beliebige Gerade mit $n \neq 0$ ist also kein Graph einer proportionalen Zuordnung. Es gilt allerdings die Umkehrung, dass jeder Graph einer proportionalen Zuordnung eine Gerade ist, nämlich eine Gerade mit der speziellen Gleichung $y = m\,x$ (da $n = 0$).
f) falsch – Die Gleichung $y = \frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$ gehört zu einer proportionalen Zuordnung der Form $y = m\,x$, der Quotient $\frac{y}{x}$ hat den konstanten Wert $\frac{1}{3}$. Der zugehörige Graph ist eine durch den Ursprung verlaufende Gerade mit der Steigung $\frac{1}{3}$. Die Gerade in Fig. 1 hat die Steigung 3 und ist daher nicht der Graph der genannten Zuordnung.

7 Geraden

a) falsch – Der Punkt $(4\,|\,3)$ liegt dann auf der Geraden, wenn die Gleichung $y = 3\,x - 5$ für $x = 4$ und $y = 3$ erfüllt ist.
Durch Einsetzen erhält man: $3 = 3 \cdot 4 - 5 = 7$ (falsch).
Der Punkt $(4\,|\,3)$ liegt also nicht auf der Geraden.
b) falsch – Die Gleichung $y = 0{,}6\,x + 1$ beschreibt eine Gerade mit der positiven Steigung $m = 0{,}6$ und dem Achsenabschnitt $n = 1$. Die Gerade in Fig. 2 hat zwar ebenfalls den Achsenabschnitt 1, die Steigung ist jedoch negativ. Die Gerade in Fig. 2 besitzt die Gleichung $y = -0{,}6\,x + 1$
($m = -0{,}6$ lässt sich aus den Punkten $(-2{,}5\,|\,2{,}5)$ und $(0\,|\,1)$ berechnen).
c) falsch – Die Steigung der Geraden lässt sich aus den beiden Punkten berechnen: $m = \frac{-5-(-1)}{2-3} = \frac{-4}{-1} = 4$. Den Achsenabschnitt n erhält man durch Einsetzen z. B. des Punktes $(3\,|\,-1)$ in die Gleichung $y = 4\,x + n$:
$-1 = 4 \cdot 3 + n \quad |\,-12$
$-13 = n$
Die Geradengleichung lautet also $y = 4\,x - 13$.
d) richtig – Man **argumentiert**: Die Gleichung $x = 3$ besagt, dass für alle Werte von y der x-Wert konstant 3 ist. Die Gerade besteht also aus den Punkten $(3\,|\,y)$ für alle y. Diese Punkte liegen auf einer Geraden, die parallel zur y-Achse (mit der Gleichung $x = 0$) liegt.
e) richtig – Zur **Lösung** dieses **Problems** muss man die relevanten geometrischen Eigenschaften der Gleichungen ermitteln: Die Gerade mit $y = 3\,x + 5$ hat die Steigung $m = 3$, die Gerade mit $y = 2\,x + 7$ hat die Steigung $m = 2$. Während die zweite Gerade je Einheit nach rechts um 2 Einheiten ansteigt, steigt die erste Gerade um 3 Einheiten an, sie verläuft also steiler.
f) falsch – Man **argumentiert** mit einem Gegenbeispiel: Die konstanten Funktionen der Form $y = a$ (a konstant und $a \neq 0$, z. B. $y = 1$) schneiden die x-Achse gar nicht, die konstante Funktion $y = 0$ hat mit der x-Achse unendlich viele gemeinsame Punkte. Richtig ist jedoch, dass jede lineare Funktion genau einmal die y-Achse schneidet, und zwar in dem Punkt $(0\,|\,n)$ mit dem Achsenabschnitt n.

g) falsch – Hier kann man geometrisch **argumentieren**: Die Geraden g und h besitzen dieselbe Steigung $m = 4$, sie verlaufen also parallel; da sie einen unterschiedlichen Achsenabschnitt n haben, sind sie nicht identisch, sondern liegen wirklich parallel zueinander. Weil sich parallele Geraden nicht schneiden, können sie in $S(4\,|\,-1)$ auch keinen Schnittpunkt haben.

Geometrie

8 Winkelbeziehungen

a) richtig – Man **argumentiert** so: Da sich Nebenwinkel zu 180° ergänzen, müssen von je zwei nebeneinander liegenden Winkeln beide 90° betragen. Damit schneiden sich die Geraden im rechten Winkel.
b) richtig – Man kann so **argumentieren**: Im Parallelogramm gilt: Die Innenwinkelsumme beträgt 360° (gilt für alle Vierecke) und die gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß (Wechselwinkel). Wenn man zwei Winkel an benachbarten Eckpunkten kennt, sind dies zugleich die Größen der jeweils gegenüberliegenden anderen Winkel; kennt man zwei (dann gleich große) gegenüberliegende Winkel, dann sind die beiden anderen Winkel gleich und so groß, dass sie sich jeweils mit einem der bekannten Winkel zu 180° ergänzen. In einem Parallelogramm wäre es sogar ausreichend, nur einen einzigen Winkel zu kennen.
c) falsch – Bei dieser **Argumentation** muss man die Begriffe „Viereck“ und „Rechteck“ richtig einordnen. Da die Innenwinkelsumme in einem Viereck 360° beträgt, muss bei drei rechten Winkeln auch der vierte Winkel 90° betragen. Ein Viereck mit vier rechten Winkeln nennt man ein Rechteck (im Spezialfall ein Quadrat).
d) richtig – Die gegebene Situation muss in einen Term (ein **mathematisches Modell**) übersetzt werden.
Für α und seinen Nebenwinkel β gilt:
I: $\alpha + \beta = 180°$
II: $\alpha = 4\beta$ (α ist viermal so groß wie β)
Das Einsetzen von II in I liefert:
$4\beta + \beta = 180°$ | zusammenfassen
$5\beta = 180°$ | : 5
$\beta = 36°$
Der Nebenwinkel β ist also 36° groß.

9 Dreiecke

a) richtig – Da die Summe der Innenwinkel im Dreieck 180° beträgt, gilt für den gesuchten Winkel γ bei gegebenen Winkeln α und β: $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.
b) falsch – Man kann mit einem Gegenbeispiel **argumentieren**: Dreiecke mit den gleichen Winkeln α, β und γ sind nicht kongruent, sondern nur ähnlich. Man findet daher beliebig viele Dreiecke mit jeweils gleichen Winkeln (z. B. die Dreiecke ABC, ADE und AFG in Fig. 1).

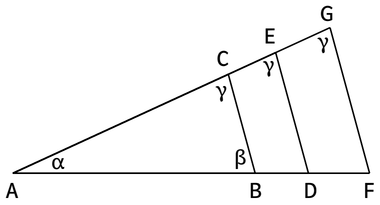


Fig. 1

c) richtig – Man kann mit einem geometrischen Satz **argumentieren**: Mit den Seiten a und b sowie dem Winkel γ sind zwei Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel gegeben. Nach dem Kongruenzsatz (sws) sind deshalb alle Dreiecke mit denselben Werten für a, b und γ zu einander kongruent und damit ist die Konstruktion eines solchen Dreiecks eindeutig.
d) falsch – Man kann **argumentieren**: Grundsätzlich lässt sich zwar nach dem Kongruenzsatz (sss) ein Dreieck mit drei gegebenen Seiten eindeutig zeichnen, allerdings nur dann, wenn die Summe zweier Seitenlängen stets größer ist als die dritte – andernfalls entsteht kein Dreieck. Da die Summe von a und b ($a + b = 12$) kleiner ist als c ($c = 13$), lässt sich kein Dreieck konstruieren.
e) richtig – In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß. Da die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt, sind alle Winkel 60° groß, es kann keinen rechten Winkel geben.
f) falsch – Mithilfe der **Problemlösestrategie**, Hilfsfiguren zu verwenden, kann man ein Gegenbeispiel finden und so **argumentieren**: Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks. Wählt man auf einem Kreis nun drei Punkte, die alle auf derselben Seite eines eingezeichneten Durchmessers liegen, erhält man ein Dreieck, dessen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten (dies ist der Kreismittelpunkt) außerhalb des Dreiecks liegt (vgl. Fig. 2)

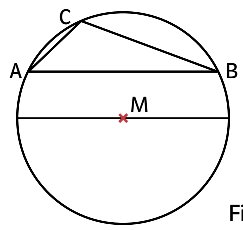


Fig. 2

g) richtig – Bei der **Argumentation** hilft der Satz des Thales: Der der längsten Seite des Dreiecks gegenüberliegende Punkt liegt auf dem Thaleskreis, sodass der Winkel bei diesem Punkt 90° beträgt. Hat man einen an die längste Seite des Dreiecks angrenzenden Winkel gegeben, muss man nur den zweiten angrenzenden Winkel berechnen, der sich nach der Innenwinkelsumme im Dreieck mit dem ersten zu 90° ergänzen muss.

10 Vierecke

a) falsch – Es hilft die **Problemlösestrategie** des Ausprobierens: Man zeichnet zunächst die Strecke $\overline{BC}$ mit der Länge $b = 5\,cm$ ein und kann an C den Winkel $\gamma = 65°$ abtragen. Der Eckpunkt A ist der Schnittpunkt des Kreises um B mit dem Radius 3 cm (wegen $a = 3\,cm$) und einer Geraden, die die Gerade CD im Winkel $\delta = 100°$ schneidet. Da es viele solcher Geraden CD gibt, die sich mit dem Kreis schneiden (zumeist in zwei Punkten), ist das Viereck nicht eindeutig konstruierbar (vgl. Fig. 1).

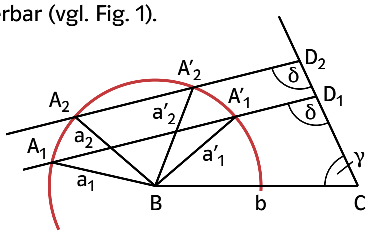


Fig. 1

b) richtig – Das **Problem** der Konstruktion **lässt** sich lösen, indem man die Beziehung der gegebenen Größen im Trapez beachtet. Da c im Abstand der Höhe h_a parallel zu a liegt und wegen der Gleichschenkligkeit die Mittelsenkrechte von a die Symmetrieachse ist, ist die Konstruktion eindeutig (s. Fig. 2): Man zeichnet die Strecke a mit den Eckpunkten A und B und ihre Mittelsenkrechte ein, die a im Punkt E schneidet. Die Höhe h_a trägt man von E aus auf der Mittelsenkrechten ab und erhält den Punkt F. Man kann nun von F aus auf der Parallelen zur Seite a zu beiden Seiten die Hälfte der Strecke c abtragen und erhält die beiden Eckpunkte C und D.

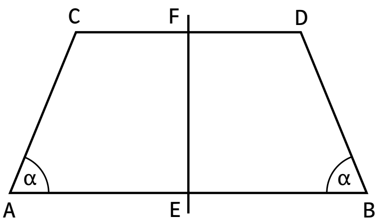


Fig. 2

c) richtig – Bei dieser **Argumentation** muss man die Begriffe (Ober- und Unterbegriff) richtig einordnen. Ein Viereck ist ein Trapez, wenn zwei gegenüberliegende Seiten parallel zueinander sind. Da dies beim Rechteck auch der Fall ist, ist das Rechteck ein Trapez.

d) falsch – Bei dieser **Argumentation** muss man die Begriffe richtig einordnen. Bei einem Parallelogramm sind, wie bei einer Raute, die gegenüberliegenden Seiten parallel, sie müssen jedoch nicht gleich lang sein. Man wählt als Gegenbeispiel ein Parallelogramm, bei dem die Seiten a und b unterschiedlich lang sind. Dieses Parallelogramm ist keine Raute.

e) falsch – Man **argumentiert** mit einem Gegenbeispiel: Da bei einem Drachen die Strecken a und d bzw. b und c gleich lang sind, ist der Drachen achsensymmetrisch mit der Symmetrieachse AC (Fig. 3). Ein Drachen ist jedoch kein Trapez, da er keine parallelen Seiten haben muss.

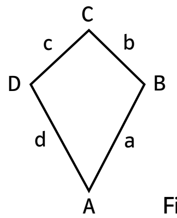


Fig. 3

11 Flächeninhalte

a) falsch – Da der rechte Winkel an die beiden kürzeren Seiten des Dreiecks angrenzt, kann b als Grundseite und a als Höhe des Dreiecks angesehen werden. Damit gilt:
$A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 5\,cm \cdot 3\,cm = 7{,}5\,cm^2$.

b) falsch – $A_{Quadrat} = a \cdot a = 5\,cm \cdot 5\,cm = 25\,cm^2$
$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot (7\,cm + 3\,cm) \cdot 5\,cm = 25\,cm^2$. Die Flächeninhalte sind also gleich.

c) falsch – Mithilfe der **Problemlösestrategie**, eine geeignete Hilfsfigur zu zeichnen (Fig. 4), kann man **argumentieren**: Wenn ein Parallelogramm mit der Grundseite $a = 2\,cm$ den Flächeninhalt $10\,cm^2$ haben soll, muss wegen der Flächenformel $A = \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$ die Höhe des Parallelogramms 5 cm betragen. Da aber die Seite b bereits 5 cm lang ist, muss die Höhe h_a in jedem Fall kleiner sein als b und damit kleiner als 5 cm (vgl. Fig. 4). Damit ist auch die Fläche kleiner als $10\,cm^2$.

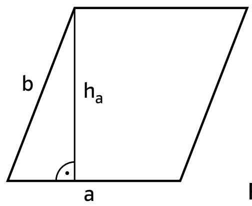


Fig. 4

d) falsch – Man **argumentiert** mit einem Gegenbeispiel: Ein Quadrat mit Seitenlänge 2 cm hat den Flächeninhalt $A = 2\,cm \cdot 2\,cm = 4\,cm^2$; eine Raute hat den Flächeninhalt $A = \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$. Bei gleicher Seitenlänge beträgt die Grundseite ebenfalls 2 cm, die Höhe jedoch ist analog zur Begründung aus c) (vgl. Fig. 4) kleiner als 2 cm. Damit ist auch der Flächeninhalt kleiner als $4\,cm^2$.

e) richtig – Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt $A = \pi \cdot r^2$. Ein Kreis mit dem Radius $r = 3\,cm$ hat also den Flächeninhalt $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (3\,cm)^2 = \pi \cdot 9\,cm^2 \approx 28{,}3\,cm^2$.

f) falsch – Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r beträgt $A_{klein} = \pi \cdot r^2$ und der eines Kreises mit dem Radius 2 r beträgt $A_{groß} = \pi \cdot (2\,r)^2 = \pi \cdot 4\,r^2 = 4 \cdot A_{klein}$.
Damit vervierfacht sich der Flächeninhalt.

12 Körper

a) falsch – Die Einheiten sind nicht korrekt. Das Prisma besitzt das Volumen $V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = 12\,\text{cm}^2 \cdot 3\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^3$ und nicht $36\,\text{m}^3$.

b) richtig – Man **argumentiert** so: Ein Prisma ist ein Körper mit zwei zueinander parallelen Flächen, den sogenannten Grundflächen, und Rechtecken als Seitenflächen. Da die Dreiecksflächen der Verpackung zueinander parallel liegen und die Seitenflächen rechteckig sind, handelt es sich um ein Prisma.

c) falsch – Ein Zylinder hat das Volumen $V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = \pi r^2 \cdot h$. Schon ein Überschlagen (**Problemlösestrategie**) des Volumens zeigt, dass der Wert $137{,}1\,\text{cm}^3$ zu klein ist: $V \approx 3 \cdot 5^2 \cdot 2 = 150$. Eine genauere Rechnung bestätigt dies: $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 2 = 50\pi \approx 157{,}1\,\text{cm}^3$.

d) richtig – Ein Würfel mit Seitenlänge a hat das Volumen $V_{klein} = a^3$, ein Würfel mit der doppelten Seitenlänge 2a hat das Volumen $V_{groß} = (2a)^3 = 2^3 \cdot a^3 = 8 \cdot a^3 = 8 \cdot V_{klein}$.

e) richtig – Eine 1-Liter-Packung hat ein Volumen von $1\,\text{dm}^3 = 1000\,\text{cm}^3$. Ein Würfel mit dem Volumen $V = a^3 = 1000\,\text{cm}^3$ hat die Seitenlänge $a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{1000\,\text{cm}^3} = 10\,\text{cm}$.

f) richtig – Mithilfe der **Problemlösestrategie**, ein geeignetes Beispiel zu finden (hier ein Prisma mit minimaler Flächenanzahl), kann man so **argumentieren**: Ein Prisma besitzt zwei zueinander parallele Grundflächen, die, damit sie ein Vieleck darstellen, mindestens 3 Eckpunkte haben müssen. Daraus folgt, dass zu einem Prisma mindestens 3 Seitenflächen (die an das Dreieck der Grundfläche angrenzen) gehören, dass es also insgesamt mindestens 5 Flächen besitzt.

Daten und Zufall

13 Wahrscheinlichkeiten

a) richtig – Das Ereignis „Würfeln einer geraden Zahl“ umfasst die drei Ergebnisse „2“, „4“ und „6“. Da es sich um ein Laplace-Experiment handelt, haben alle drei Ergebnisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Nach der Summenregel beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Würfeln einer geraden Zahl“ $p = 3 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}5$.

b) richtig – Wenn man die **Problemlösestrategie** anwendet, die Beziehungen der Flächen und Zahlen zueinander zu untersuchen, kommt man zu folgender **Argumentation**: Die drei verschieden großen Flächen liegen beim Würfeln sicherlich mit unterschiedlich großen Wahrscheinlichkeiten oben; da jedoch die Summe der Zahlen auf den gegenüber liegenden Flächen stets 7 beträgt und die 7 sich aus einer geraden und einer ungeraden Zahl zusammensetzt, verteilen sich jeweils die drei geraden und die drei ungeraden Zahlen auf diese drei Flächen. Da man für gleich große Flächen außerdem gleich große Wahrscheinlichkeiten annehmen sollte, beträgt die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die drei verschieden großen Flächen und damit für das Ereignis „Würfeln einer geraden Zahl“ 0,5.

c) falsch – Die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ und „Zahl“ beträgt je 0,5. Nach der Pfadregel gilt für die Wahrscheinlichkeit „zweimal Zahl“ $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.
Das Ereignis „einmal Zahl und einmal Wappen“ setzt sich zusammen aus den Ergebnissen „erst Zahl, dann Wappen“ und „erst Wappen, dann Zahl“. Aus der Pfadregel und der Summenregel erhält man $p = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 0{,}5$. Die Wahrscheinlichkeiten sind also unterschiedlich groß.

d) falsch – Das Ereignis „eine Zahl kleiner als 3 würfeln“ enthält die Ergebnisse „1“ und „2“; das Gegenereignis umfasst alle übrigen Ergebnisse „3“, „4“, „5“ und „6“ und könnte daher z. B. lauten „eine Zahl größer als 2 würfeln“; das Ereignis „eine Zahl größer als 3 würfeln“ schließt die 3 aus und ist daher nicht das Gegenereignis.

e) falsch – Man muss zwischen der Realität und dem **mathematischen Modell** unterscheiden: Relative Häufigkeiten sind „reale“ in Zufallsexperimenten ermittelte Werte, die beschreiben, wie häufig ein bestimmtes Ergebnis in einem Experiment bezogen auf die Gesamtzahl der Versuche aufgetreten ist, z. B.: Es trat bei 50 Münzwürfen 28-mal „Wappen“ auf, die relative Häufigkeit für „Wappen“ beträgt $\frac{28}{50} = 0{,}56 = 56\,\%$.
Wahrscheinlichkeiten hingegen sind „theoretische Größen“ eines **mathematischen Modells**, mit denen man versucht, relative Häufigkeiten bei Zufallsexperimenten vorherzusagen, z. B.: Die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ beträgt 50 % bedeutet, man erwartet bei 1000 Münzwürfen etwa $1000 \cdot 50\,\% = 500$ „Wappen“.

f) falsch – Zum Ereignis „dreimal hintereinander eine 5 würfeln“ gehört nur das Ergebnis „5, 5, 5“ mit der Wahrscheinlichkeit $p = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0{,}46\,\%$. Zum Ereignis „in drei Würfen die Summe 15 würfeln“ hingegen gehören die Ergebnisse „5, 5, 5“, „6, 4, 5“, „4, 6, 5“, „4, 5, 6“, „6, 5, 4“, „5, 4, 6“, „5, 6, 4“, „6, 6, 3“, „6, 3, 6“ und „3, 6, 6“. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $p = 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 4{,}6\,\%$. Die Wahrscheinlichkeiten sind also unterschiedlich groß.

14 Statistik

a) falsch – Man erstellt zunächst eine geordnete Liste: 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8. Der Median der Liste mit 9 Werten ist der mittlere, also der 5. Wert, er ist 5 und nicht 4.

b) falsch – Das arithmetische Mittel beträgt
$\frac{1}{9} \cdot (2 + 8 + 5 + 3 + 2 + 6 + 7 + 4 + 5) = \frac{42}{9} \approx 4{,}7$.

c) falsch – $p = \frac{\text{Anzahl der Treffer}}{\text{Gesamtzahl der Würfe}} = \frac{34}{200} = 0{,}17 = 17\,\%$.

d) richtig – Mithilfe der **Problemlösestrategie**, den allgemeinen Fall „Alle Werte betragen a“ zu betrachten, kann man **argumentieren**: Der Mittelwert ist die Summe aller Werte geteilt durch die Anzahl der Werte; bei n gleichen Werten a gilt damit für den Mittelwert: $\frac{1}{n} \cdot (n \cdot a) = a$.

e) richtig – Bei der **Argumentation** hilft die **Problemlösestrategie**, konkrete Werte zu betrachten; dabei zeigt sich, dass das **mathematische Modell** der Kenngrößen „Median und arithmetisches Mittel“ hier nicht angemessen ist: Bei einer Bundestagswahl sehen die Ergebnisse so aus, dass für die einzelnen Parteien angegeben wird, wie viel Prozent der Wählerstimmen sie erhalten haben, man erhält einzelne Zuordnungen (z. B. *CDU → 39,4 %*; *SPD → 37,3 %*; …). Um den Median bestimmen oder das arithmetische Mittel berechnen zu können, benötigt man jedoch eine Datenreihe mit (einheitlichen) Zahlenwerten.
f) richtig – Für das arithmetische Mittel aus den 5 Daten x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5 gilt:

$$\frac{1}{5} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 3 \qquad | \cdot 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$$

Die Summe aller Daten muss also 15 sein.

15 Diagramme

In den folgenden Aufgaben muss das **mathematische Modell** der Diagrammform „Boxplot“ angemessen interpretiert werden.
a) richtig – Das (zeitliche) Maximum bei den Mädchen liegt oberhalb des Maximums bei den Jungen, das langsamste Mädchen benötigt also insgesamt die längste Zeit und ist damit langsamer als jeder Junge.
b) richtig – Die Box der Jungen umfasst die Zeiten zwischen 8,6 s und 9,5 s. Da in der Box eines Boxplots ca. die Hälfte aller Daten liegen, laufen 50 % der Jungen zwischen 8,6 s und 9,5 s.
c) richtig – Bei den Mädchen umfasst die Box die Zeiten zwischen ca. 8,9 s und 9,5 s. Da in dieser Box bereits 50 % der Daten liegen, sind also mindestens 50 % der Mädchen 8,6 s und 9,5 s gelaufen. Dass es mehr als 50 % sind, kann nicht sicher gesagt werden, da sich aus dem Boxplot nicht ablesen lässt, ob zwischen 8,6 s und 8,9 s auch ein Datenwert liegt.
d) richtig – Da das Minimum der Mädchen unterhalb dem der Jungen liegt, ist ein Mädchen die beste Zeit gelaufen.
e) richtig – Das Maximum bei den Jungen liegt oberhalb von 10 s, damit ist der langsamste Junge über 10 s gelaufen.
f) richtig – Da zwischen dem Minimum und dem unteren Quartil (bei ca. 8,6 s) immer ca. 25 % aller Daten liegen, sind ca. 25 % der Jungen 8,6 s und schneller gelaufen.