

Kennst du solche Situationen?

Du liest einen Text, siehst dir eine Grafik oder Tabelle an und sofort schießen dir Fragen durch den Kopf. Sie beginnen mit „Gibt es ...?“, „Wie verändert sich...?“, „Ist das immer so ...?“ usw.

Um diese Fragen zu beantworten, musst du alle notwendigen Informationen sammeln. Aus diesen kannst du mathematische Argumentationen entwickeln und die Lösungswege beschreiben und begründen.

Wenn du deine eigenen Ideen und Gedanken dann erklären möchtest, solltest du sie so formulieren oder mithilfe von Zeichnungen untermauern, dass dein Gegenüber sie problemlos versteht und lückenlos nachvollziehen kann. Achte genau auf die Fragen und Äußerungen deines Gegenübers und antworte so präzise wie möglich.

Mit Texten arbeiten

Wenn du mit Texten arbeitest, entnimm schrittweise die relevanten Informationen und bringe sie in einen Zusammenhang.

Beispiel

Lies den Zeitungsausschnitt. Welche Aussage macht die Ärztekammer-Präsidentin? Rechne nach.

Ärzte bilden mehr Helferinnen aus

(te) Die Neustädter Ärzte bilden derzeit sehr viel mehr Arzthelferinnen aus als vor einem Jahr. In der letzten aktuellen Erhebung wurden für Neustadt 165 und für Altdorf 38 Ausbildungsverträge genannt. Ein Jahr zuvor waren es insgesamt 163 Verträge. Der erfreuliche Anstieg mache deutlich, „dass sich die niedergelassenen Ärzte ihrer Verantwortung hinsichtlich ausreichender Ausbildungsplätze sehr wohl bewusst sind“, kommentierte die Ärztekammer-Präsidentin. Da bei der Kammer täglich noch weitere Verträge eingingen, rechne man mit einem Plus von über 20 Prozent.

So könntest du vorgehen:

1. Notiere die Aussagen und Zahlen des Zeitungsartikels, die für die Lösung notwendig sind. Als Hilfe kannst du wichtige Stellen im Text farbig markieren oder unterstreichen.

In der letzten aktuellen Erhebung ergaben sich für Neustadt 165 und für Altdorf 38 Ausbildungsverträge, also insgesamt 203 Ausbildungsverträge. Ein Jahr zuvor waren es insgesamt 163 Verträge.

2. Plane den Lösungsweg und führe die Rechnung durch.

im letzten Jahr: $100\% = 163 \text{ Verträge}$
 $20\% = 33 \text{ Verträge, also insgesamt } 196$

3. Bewerte deine Lösung.

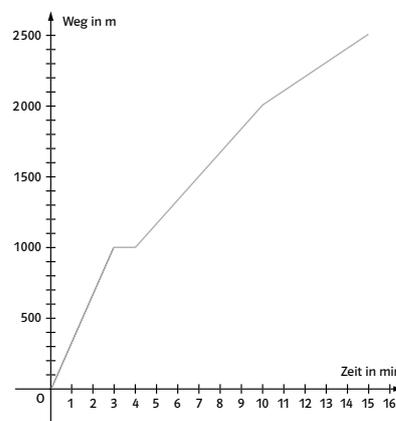
Es waren bereits zu diesem Zeitpunkt deutlich über 20% mehr Verträge unterzeichnet. Die Aussage legt aber nahe, dass bis zum Zeitpunkt des Interviews die Steigerung unter 20% lag.

Mit Darstellungen arbeiten

Manchmal ist es leichter, einen Text oder eine Darstellung erst einmal ausschnittsweise zu betrachten.

Beispiel

Welche Informationen enthält der Graph? Finde eine passende Alltagssituation und schreibe eine Geschichte zum Graphen.



So könntest du vorgehen:

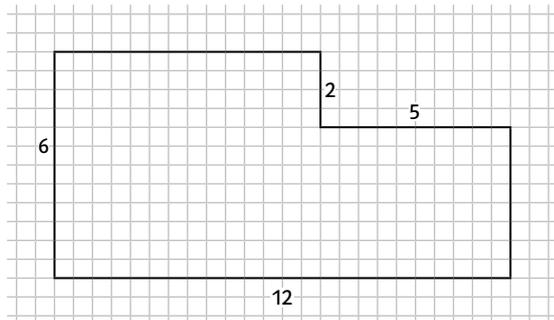
1. Sieh dir zuerst die **Beschriftungen** der x- und der y-Achse an. Man erkennt, dass etwas oder jemand in einer bestimmten Zeit eine bestimmte Strecke zurückgelegt hat.
2. Betrachte dann den **Graphen**. Die unterschiedlichen Steigungen des Graphen in verschiedenen Abschnitten lassen vermuten, dass sich jemand – möglicherweise mit verschiedenen Verkehrsmitteln – mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortbewegt.
3. Mögliche Beschreibung einer Alltagssituation:
 In den ersten 3 Minuten legt jemand oder etwas m zurück. (z.B. Traktor, Fahrrad, langsamer Bus...)
 Darauf folgen min Stillstand (z.B. Bushaltestelle, Ampel, Gespräch, Fahrrad abschließen, ...).
 Danach legt jemand oder etwas innerhalb von min weitere m zurück, also mit der halben Geschwindigkeit wie im ersten Abschnitt (z.B. zügiges Gehen, langsames Fahrrad...).
 In den letzten min werden m zurückgelegt (z.B.).

Lösungswege verstehen und vergleichen

Manchmal ist der Weg das Ziel!
 Es ist häufig schwieriger und auch wichtiger, die richtigen Lösungswege zu finden oder zu verstehen. Hat man das geschafft, ist die Lösung selbst eine leichte Übung.

Beispiel

Der Flächeninhalt der Figur soll berechnet werden. Florian und Marie haben unterschiedliche Lösungswege gewählt. (alle Angaben in cm)



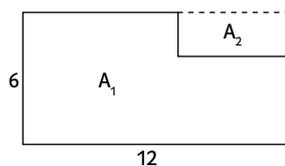
Florians Lösungsweg: $12 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 62$
 Maries Lösungsweg: $6 \cdot 7 + 4 \cdot 5 = 62$

- a) Erkläre die Lösungswege von Florian und Marie.
- b) Finde einen dritten Lösungsweg.

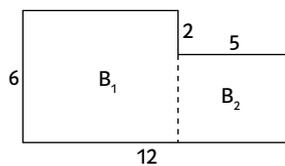
So könntest du vorgehen:

a) Du kannst die Lösungswege von Florian und Marie erklären, indem du sie mithilfe von Zeichnungen beschreibst.

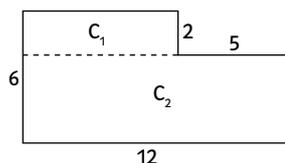
Florian hat erst den Flächeninhalt des großen Rechtecks (A_1) berechnet und dann den des kleinen Rechtecks (A_2) subtrahiert.



Marie hat die Figur in zwei Rechtecke (B_1 und B_2) geteilt und deren Flächeninhalte addiert.



b) Es ist auch möglich, die Figur wie in der Zeichnung rechts in zwei Rechtecke zu teilen. Die Rechnung lautet dann:



Behaupten – Begründen – Widerlegen

Manchmal werden Behauptungen aufgestellt, die man überprüfen und hinterfragen soll: Ist das eine wahre Aussage, die da präsentiert wird oder ist die Aussage falsch?

Um zu zeigen, dass eine Behauptung **richtig** ist, reicht eine einfache Antwort nicht aus. In der Mathematik müssen Behauptungen ausführlich begründet oder bewiesen werden. Dabei müssen die Schritte der Begründung logisch aufeinander aufbauen und auf anderen wahren Aussagen beruhen.

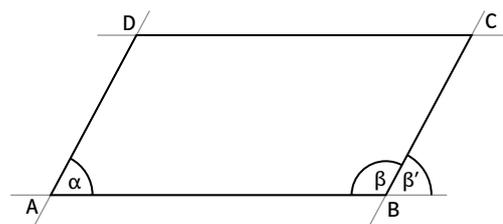
Um zu zeigen, dass eine Behauptung **falsch** ist, reicht ein einziges Gegenbeispiel.

Beispiel

- (1) Die zwei Winkel an einer Seite eines Parallelogramms ergänzen sich zu 180° .
 - (2) Gegenüberliegende Winkel in einem Drachen sind gleich groß.
- Beurteile die beiden Aussagen.

So könntest du vorgehen:

- (1) Eine Zeichnung hilft, die Behauptung zu hinterfragen:



Verlängert man alle Seiten des Parallelogramms nach außen, erkennt man, dass man die Winkelsätze an Paaren sich schneidender Geraden anwenden kann.

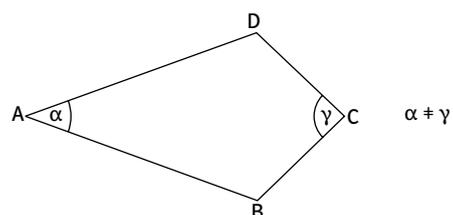
Somit gilt:

$\alpha = \beta'$ (Stufenwinkel); $\beta' + \beta = 180^\circ$ (Nebenwinkel)
 daraus folgt: $\alpha = 180^\circ - \beta$ bzw. $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Analog kann man dies für die anderen Winkel an einer Seite zeigen.

- (2) Zwei der vier Winkel werden durch die Symmetrieachse aufeinander abgebildet und sind deshalb gleich groß. Die beiden anderen Winkel werden zwar jeweils durch die Symmetrieachse halbiert, müssen aber nicht gleich groß sein.

Um die Behauptung zu widerlegen, reicht auch ein einziges Gegenbeispiel:



Aufgaben – Argumentieren und Kommunizieren – Fragen stellen und Antworten finden

1 Richtig oder falsch? Begründe oder widerlege.

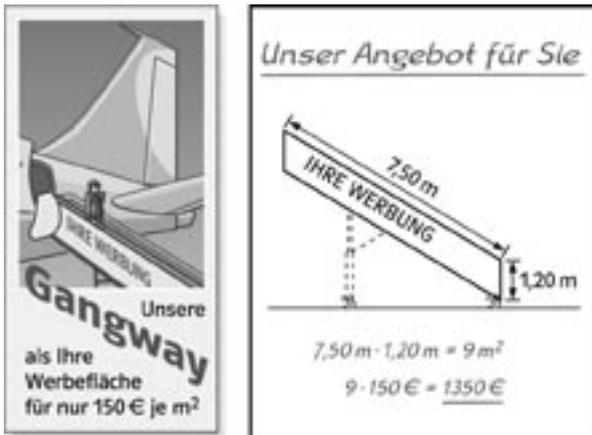
a) Es gibt besondere Trapeze, die auch Drachen sind.

richtig falsch

b) Jede punktsymmetrische Figur ist auch achsensymmetrisch.

richtig falsch

2 Welchen Fehler hat der Praktikant der Werbefirma gemacht? Beschreibe und korrigiere ihn.



3 Gehören zu den Beschreibungen (1) und (2) die gleiche Sorte von Dreiecken? Begründe deine Antwort.

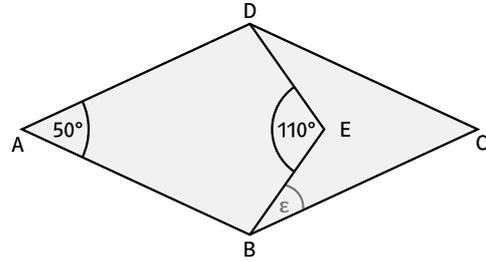
(1) Dreiecke mit genau zwei gleich großen Winkeln
 (2) Dreiecke mit mindestens einer Symmetrieachse

ja nein

Begründung:

4 ABCD ist eine Raute, ABED und BCDE sind Drachen. Berechne die Größe des Winkels ϵ .

Erkläre und begründe, wie du vorgehst.



5 Wie erkennst du am Zähler und Nenner eines Bruches, dass der Bruch

a) eine natürliche Zahl darstellt.

Beispiel: _____

b) kleiner als 1 ist.

Beispiel: _____

c) größer als 1 ist.

Beispiel: _____

c) kleiner als 0,5 ist.

Beispiel: _____

6 Überprüfe folgende Behauptungen und begründe, wenn du dich für „falsch“ entschieden hast, durch ein einfaches Gegenbeispiel.

a) Brüche, die den gleichen Nenner haben, sind immer gleich.

richtig falsch

b) Von zwei Brüchen ist derjenige größer, der den kleineren Nenner hat.

richtig falsch

c) Von zwei Brüchen mit dem gleichen Nenner ist derjenige größer, der den größeren Zähler hat.

richtig falsch

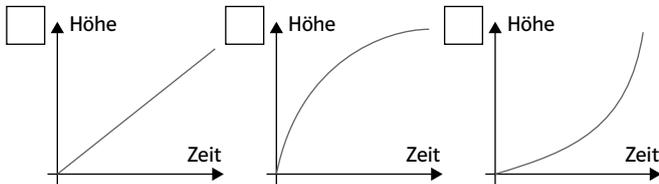
7 Nimm Stellung zu folgendem Zeitungsausschnitt.

Ehescheidungen
 Jede dritte Ehe in Deutschland wird geschieden,
 in Großstädten sogar jede vierte.
Wochenpost, 1995

8 Über ein Förderband wird Salz zu einem kegelförmigen Haufen (Schüttkegel) abgeladen.



Welcher Graph könnte passen. Kreuze an.



Begründe deine Wahl.

9 Wo steckt hier der Fehler?
 Schreibe die richtige Rechnung daneben.

a) $x + 5 = 20$
 $x = 25$

Fehler: _____

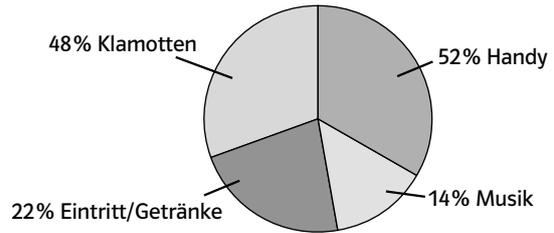
b) $20x = 10$
 $x = 2$

Fehler: _____

c) $22x = 22$
 $x = 0$

Fehler: _____

10 In einer Umfrage wurden Jugendliche befragt, wofür sie ihr Geld ausgeben. Die Ergebnisse sind im Kreisdiagramm dargestellt.



Im **Wochenblatt** heißt es:
 „Ergebnis anders als erwartet! Nur etwa ein Drittel der Jugendlichen gibt ihr Geld fürs Handy aus.“

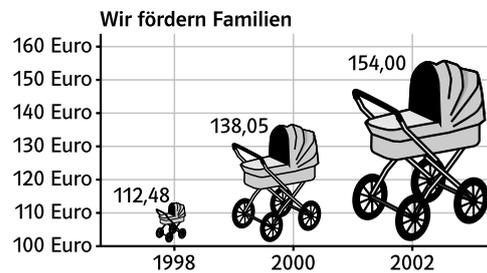
Die **Tagespost** hingegen schreibt:
 „Knapp die Hälfte der Jugendlichen gibt ihr Geld für Klamotten aus.“

a) Welche Zeitung hat das Umfrageergebnis richtig ausgelegt?

Begründe, wie es zum Irrtum der anderen Zeitung kommen konnte.

b) Mache einen Vorschlag, wie man das Umfrageergebnis darstellen kann, um diesen Irrtum zu vermeiden.

11 Nimm Stellung zu folgender Zeitungsgrafik.



Entwicklung des Kindergeldes für das erste und zweite Kind
 Quelle: Bundesministerium für Finanzen

Lösungen

Basiswissen

„Mit Darstellungen arbeiten“

1000 m; 1 min; 6 min, 1000 m; 5 min, 500 m, z.B. Gehen, Fahrrad schieben, ...

„Lösungswege verstehen und vergleichen“

b) $2 \cdot 7 + 4 \cdot 12$

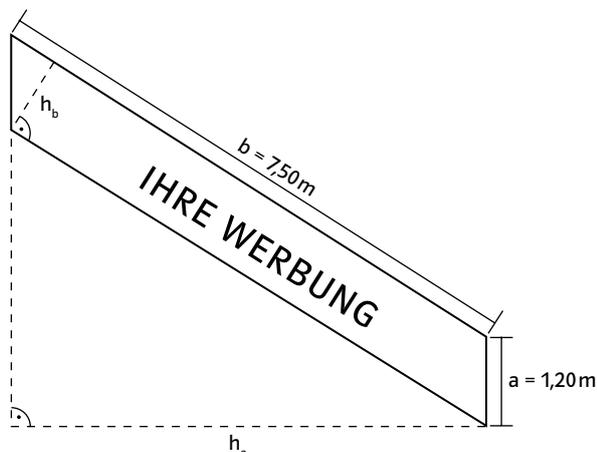
„Behaupten – Begründen – Beweisen“

Das Produkt hat so viele Nachkommastellen wie die Faktoren des Produktes zusammen.

Aufgabenteil

1 a) Richtig! Ein Trapez ist ein Viereck mit mindestens zwei gegenüberliegenden parallelen Seiten. Wenn gleichzeitig je zwei benachbarte Seiten gleich lang sind, liegt ein Drachen vor.
b) Falsch! Ein mögliches Gegenbeispiel ist ein Parallelogramm. Es ist punkt- und nicht achsensymmetrisch (wenn es sich nicht um den Spezialfall des Quadrats handelt).

2 Der Praktikant hat die Fläche des Parallelogramms falsch berechnet. Statt mit der Höhe hat er mit der Seitenlänge multipliziert.



Die Fläche des Parallelogramms ist
 $A = 1,20 \text{ m} \cdot h_a = 7,50 \text{ m} \cdot h_b$
 Damit ist die richtige Lösung = $A (\text{m}^2) \cdot 150 \text{ €}$

3 Es werden nicht die gleichen Dreiecke beschrieben. Unter (1) sind gleichschenklige Dreiecke beschrieben, die nicht gleichseitig sind. Bei (2) werden gleichschenklige Dreiecke beschrieben, die auch gleichseitig sein können.

4 In der Raute sind gegenüberliegende Winkel gleich groß. Daher beträgt der Winkel bei C 50° . Die beiden Winkel bei E ergeben zusammen einen Vollwinkel (360°), dann beträgt der unbekannte Winkel bei E im

Viereck BCDE $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$. Die Winkelsumme im Viereck ist 360° . Die Winkel bei B und D im Viereck BCDE sind dann zusammen $360^\circ - (250^\circ + 50^\circ) = 60^\circ$ groß. Da die Figur ein Drachen ist, sind die Winkel bei B und D gleich groß, also ist $\epsilon = 60^\circ : 2 = 30^\circ$.

5 a) Der Zähler ist ein Vielfaches des Nenners.

Beispiel: $\frac{6}{3} = 2$

b) Der Zähler ist kleiner als der Nenner.

Beispiel: $\frac{1}{2} = 0,5$

c) Der Zähler ist größer als der Nenner.

Beispiel: $\frac{3}{2} = 1,5$

d) Der Zähler beträgt weniger als die Hälfte des Nenners.

Beispiel: $\frac{3}{8} = 0,375$

6 a) falsch, z.B. $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{3}$ b) falsch, z.B. $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$
 c) richtig

7 Der Zeitungsausschnitt will durch die Formulierung „sogar jede vierte“ vermitteln, dass in Großstädten mehr Ehen geschieden werden als im ganzen Land, denn Vier ist mehr als Drei. Berechnet man die Prozentsätze, stellt man fest, dass das Gegenteil der Fall ist. Jede dritte Ehe entspricht rund $33,3\%$, jede vierte sind genau 25% .

8 Der zweite Graph ist der richtige, da die Menge des hinzukommenden Salzes immer dieselbe ist, der Salzhügel aber immer breiter wird. Auf der Oberfläche des Hügels findet immer mehr Salz Platz. Deshalb nimmt die Geschwindigkeit, mit welcher der Hügel an Höhe gewinnt, ab.

9 a) Fehler: 5 wurden addiert statt subtrahiert.

Richtige Rechnung: $x + 5 = 20 \quad | - 5$
 $x = 15$

b) Fehler: $10 : 20 \neq 20 : 10$

Richtige Rechnung: $20x = 10 \quad | : 20$
 $x = \frac{1}{2}$

c) Fehler: $22 : 22 \neq 0$

Richtige Rechnung: $22x = 22 \quad | : 22$
 $x = 1$

10 a) Das Wochenblatt hat die Ergebnisse richtig interpretiert, die Tagespost dagegen nicht. Das Problem ist die falsche Beschriftung des Diagramms. Die dort genannten Werte können nicht die prozentualen Anteile sein, da sich dann ein Wert über 100% ergibt. Daher müssen diese Angaben absolute Werte sein. Die Aufteilung des Kreises hingegen entspricht der prozentualen Verteilung (Klamotten $35,5\%$, Handy $38,2\%$, Musik $10,3\%$, Eintritt/Getränke $16,2\%$). Die Tagespost hat nicht auf die Einteilung des Kreises geachtet, sondern die Zahlen zugrunde gelegt.

b) Entweder beschriftet man das Kreisdiagramm richtig, d.h. mit den prozentualen Angaben oder man wählt eine andere Darstellungsform, z. B. Balkendiagramm.

11 Durch die Verschiebung des Koordinatenursprungs auf der Hochachse, deren Einteilung bei 100 € beginnt, entsteht ein verzerrtes Bild der Größenverhältnisse. Die Zahlen an den Kinderwagen geben die Größen richtig wieder, jedoch erreicht man durch die Verwendung der dreidimensionalen Kinderwagen eine zusätzliche Verzerrung der realistischen Werte.

Bildquellenverzeichnis

4.1: Avenue Images GmbH (digitalvision), Hamburg