Funktionsuntersuchung an einer Exponentialfunktion

Aufgabe Buch S. 134 Nr. 4d

Gegeben: $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^x$ wobei $e^x > 0$

Bilden der Ableitungen: $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 1) \cdot e^x = (x^2 + 2x - 1) \cdot e^x$

$f''(x) = (2x + 2) \cdot e^x + (x^2 + 2x - 1) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 1) \cdot e^x$

$f'''(x) = (x^2 + 6x + 5) \cdot e^x$

(1) Definitionsbereich: D = R

(2) Symmetrie: $f(-x) = ((-x)^2 - 1) \cdot e^{-x} \neq f(x)$ $f(-x) = ((-x)^2 - 1) \cdot e^{-x} \neq -f(x)$ → keine Symmetrie

(3) Grenzwert: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 1) \cdot e^x \to 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - 1) \cdot e^x \to \infty$

(4) Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen:

1. Achse: $f(x) = 0$ und $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^x \Rightarrow (x^2 - 1) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1 \Rightarrow N_1(-1|0)$ $N_2(1|0)$

2. Achse: $f(0) = -1 \cdot e^0 = -1 \Rightarrow P(0|-1)$

(5) Extrempunkte: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 1) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 + \sqrt{2} \vee x = -1 - \sqrt{2}$

$f''(-1 + \sqrt{2}) > 0 \Rightarrow$ rel. TP

$f''(-1 - \sqrt{2}) < 0 \Rightarrow$ rel. HP

$f(-1 + \sqrt{2}) \approx -1{,}254$ und $f(-1 - \sqrt{2}) \approx 0{,}432$ somit TP $\approx (0{,}414|-1{,}254)$ und HP $\approx (-2{,}414|0{,}432)$

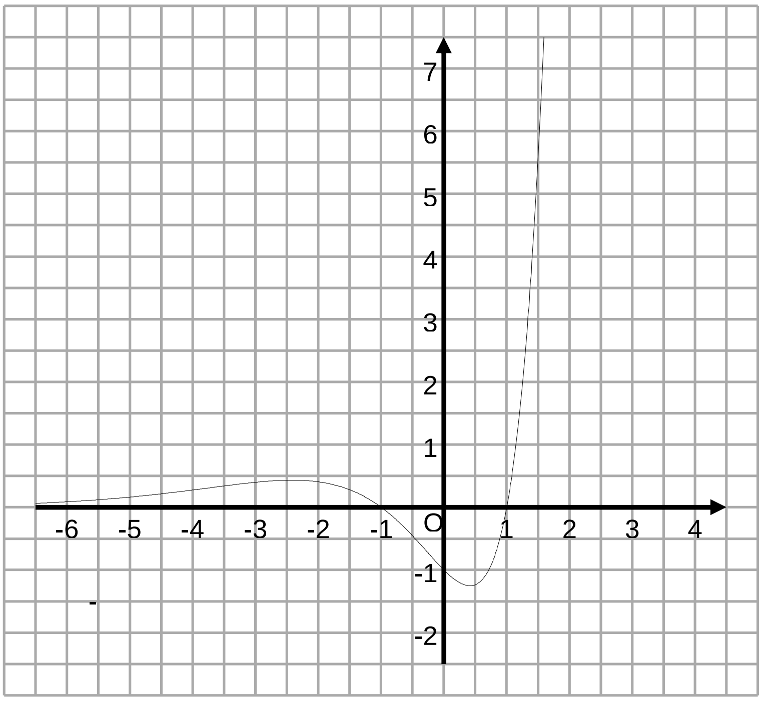
(6) Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 1) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -2 + \sqrt{3} \vee x = -2 - \sqrt{3}$

$f'''(-2 + \sqrt{3}) \neq 0 \Rightarrow$ WP

$f'''(-2 - \sqrt{3}) \neq 0 \Rightarrow$ WP

$f(-2 + \sqrt{3}) \approx -0{,}71$ und $f(-2 - \sqrt{3}) \approx 0{,}31$ somit WP $\approx (-3{,}732|0{,}31)$ und WP $\approx (-0{,}2679|-0{,}71)$

(7) Skizze



$F(x) = e^x (x^2 - 2x + 1)$ sei Stammfunktion zu $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^x$. Bestimmen Sie die Inhalte der beiden Flächen, die vom Graphen G(f) und der x-Achse berandet werden.

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = F(x)\Big|_{-1}^{1} = -4e^{-1}$, also $A_1 = 4e^{-1}$ FE

$\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx = \lim\limits_{a \to -\infty} \left[(x^2 - 2x + 1) \cdot e^x\right]_a^{-1} = 4e^{-1}$, also $A_2 = 4e^{-1}$ FE