Funktionsuntersuchung einer ganzrationalen Funktionenschar

$\mathbf{f_a(x) = -\frac{1}{3a}x^3 + a\,x}$ $\quad$ $\mathbf{(a > 0)}$

1. Definitionsbereich $D(f_a) = \mathbb{R}$

2. Symmetrieverhalten von $G(f_a)$:

Da im Polynom $f_a(x)$ nur ungerade Exponenten bei den Potenzen von x auftreten, gilt **für alle $x \in \mathbb{R}$: $f_a(-x) = -f_a(x)$**, also sind alle $G(f_a)$ punktsymmetrisch zum Ursprung.

3. Achsenschnittpunkte von $G(f_a)$:

$\mathbf{f_a(x) = 0} \Leftrightarrow -\frac{1}{3a}x^3 + a\,x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x = 0 \Leftrightarrow x\,(x^2 - 3a^2) = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{x = 0} \vee \mathbf{x = -a\sqrt{3}} \vee \mathbf{x = a\sqrt{3}}$

$G(f_a)$ schneidet die x- Achse in den Punkten $\mathbf{S_{x1}(-a\sqrt{3}\ /\ 0)}$, $\mathbf{S_{x2}\ (0\ /\ 0)}$ **und** $\mathbf{S_{x3}(a\sqrt{3}\ /\ 0)}$

$\mathbf{S_{x2}\ (0\ /\ 0)}$ ist auch der Schnittpunkt $\mathbf{S_y}$ mit der y-Achse.

4. Extrempunkte von $G(f_a)$:

$f_a'(x) = -\frac{1}{a}x^2 + a$ $\quad$ und $\quad$ $f_a''(x) = -\frac{2}{a}x$

Notwendige Bedingung: $f_a'(x) = 0$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{a}x^2 + a = 0 \Leftrightarrow x^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = -a \vee x = a}$

Überprüfen der Extremstellenkandidaten:

$f_a''(a) = -2 < 0 \Rightarrow$ HP bei $x = a$

$f_a''(-a) = 2 > 0 \Rightarrow$ TP bei $x = -a$

Berechnung der y-Koordinaten:

$f_a(a) = -\frac{1}{3a}a^3 + a^2 = -\frac{1}{3}a^2 + a^2 = \frac{2}{3}a^2$

Aufgrund der Punktsymmetrie zum Ursprung ist $f_a(-a) = -\frac{2}{3}a^2$.

Die $G(f_a)$ besitzen jeweils zwei relative Extrempunkte: einen **Hochpunkt $H(\,a\ /\ \frac{2}{3}a^2\,)$** und einen **Tiefpunkt $T(\,-a\ /\ -\frac{2}{3}a^2\,)$** .

5. Wendepunkte von $G(f_a)$:

Notwendige Bedingung: $f_a''(x) = 0$ $\Leftrightarrow -\frac{2}{a}x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 0}$

Überprüfung des Wendestellenkandidaten:

$f_a'''(x) = -\frac{2}{a} \neq 0 \Rightarrow$ WP bei $x = 0$

Alle Graphen $G(f_a)$ besitzen **einen Wendepunkt $W(\,0\ /\ 0)$**.

6. Wertebereich: $W(f_a) = \mathbb{R}$

7. Grenzwertverhalten:

$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$, da x^3 den größeren Beitrag liefert.

8. Zusätzliche Punkte durch Wertetabelle:

wegen der Punktsymmetrie nur für $x \in [\,0; 6\,]$

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_3(x)$	0	2,9	5,1	6	4,9	1,1	–6