

## Hinweise zur Durchführung der Vergleichsarbeit Mathematik in den 8. Klassen am 19. April 2004, in der 3. oder 4. Unterrichtsstunde

1. Die Unterlagen zur Vergleichsarbeit Mathematik werden den beteiligten Lehrkräften am Montag, 19.4.04, ausgehändigt. Das Material ist in hinreichender Anzahl vervielfältigt und klassenweise verpackt.
2. Die reine Arbeitszeit beträgt exakt 60 Minuten.
3. Zugelassene Arbeitsmittel: Zeichengeräte (Geodreieck, Zirkel), Taschenrechner (in der letzten Stunde vor der Arbeit sollte daran erinnert werden).
4. Nebeneinander sitzende Schüler erhalten Aufgaben verschiedener Gruppen (A, B).
5. Vor Beginn der Bearbeitung der Aufgaben:
  - a. Aufforderung an die Schülerinnen und Schüler, Ihren vollen Namen (Vor- und Zuname) sowie die Angabe der Klasse auf dem Aufgabenblatt zu notieren.
  - b. Hinweis an die Schülerinnen und Schüler, dass für die äußere Form (Korrektheit in der mathematischen Symbolik, aber auch Sauberkeit der Darstellung) innerhalb der Gesamtbewertung maximal zwei Punkte gegeben werden können.
6. Die Aufgabenstellung darf von der Aufsicht nicht erläutert werden, auch nicht gegenüber einzelnen Schülern. Das Verständnis der Aufgabenstellung gehört mit zur verlangten Leistung.
7. Die Arbeit wird in der üblichen Art und Weise korrigiert. Jede Fachlehrkraft einer 8. Klasse korrigiert einen Klassensatz, aber nicht den ihrer eigenen Klasse.
8. Die Zensurengebung erfolgt nach dem in den Lösungsunterlagen beschriebenen Schema; zur zentralen Auswertung sind nur ganze Noten (ohne Tendenzangaben) bzw. Punktzahlen zurückzumelden.
9. Treten beim Korrigieren größere Probleme bzgl. der Bepunktung auf, so sind Rückfragen möglich beim Fachreferenten, Herrn Renz, Tel. 428 63 33 64, e-mail: werner\_renz@public.uni-hamburg.de .

13.04.2004

Name: \_\_\_\_\_

**Beachte: Zu einer Lösung gehört auch immer die Angabe des Lösungsweges.**

**1. Aufgabe**

- a) Zeichne in ein Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 cm; x zwischen -1 und 9, y zwischen -4 und 6) die Punkte A ( 1 | 2,5 ), B ( 8 | -1 ) und C ( 5 | 4 ) ein.
- b) Welche besondere Eigenschaft haben alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $\overline{AB}$  liegen?
- c) Konstruiere den Punkt P, der von den beiden Punkten A und B gleich weit entfernt ist und der außerdem auf der Geraden durch A und C liegt!  
Erläutere deine Konstruktion.

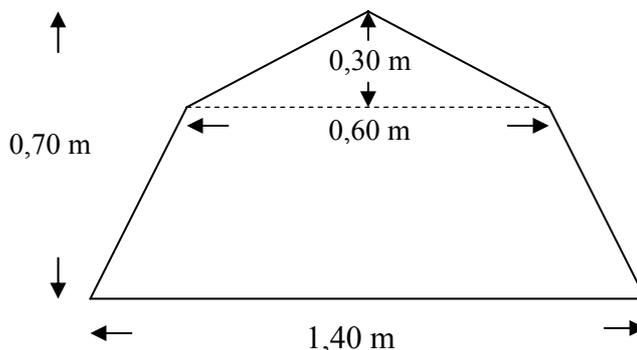
**2. Aufgabe**

In einer Forschungsstation liefert ein Benzinmotor die nötige Energie. Der Motor braucht 1,8 Liter Benzin pro Stunde, der Tank fasst 240 Liter.

- a) Berechne, wie lange der Motor laufen kann, wenn der Tank am Anfang voll ist.
- b) Nach 30 Stunden Betrieb tritt in den Leitungen ein kleines Leck auf, das zu einem Verlust von 0,6 Liter pro Stunde führt. Reicht es, wenn das Versorgungsfahrzeug 5 Tage nach dem Anlassen des Motors wiederkommt, wie es ursprünglich vorgesehen war? Begründe deine Antwort.

**3. Aufgabe**

Herr Müller will in seinem Dach ein besonders geformtes Dachfenster einbauen. Dazu muss er zunächst die passende Öffnung in die Dachverkleidung sägen. Dafür enthält der Bausatz eine Schablone:



**Umriss der Fensterfläche**

Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht!

- a) Zeige, dass die Fläche, die Herr Müller aussägen muss, einen Flächeninhalt von  $0,49 \text{ m}^2$  hat.
- b) Hinter der Verkleidung befindet sich Dämmmaterial von 20 cm Tiefe. Welches Volumen an Dämmmaterial muss Herr Müller entfernen?

**4. Aufgabe**

Eine Firma, die Waschmaschinen verkauft, hat in langjähriger Erfahrung festgestellt, dass bei ihren Kunden für Reparaturen der gelieferten Waschmaschinen jährlich folgende Kosten mit folgenden Wahrscheinlichkeiten anfallen:

Kosten in €	0	40	60	80	120	150
Wahrscheinlichkeit	35%	5%	20%	23%	10%	7%

- a) Die Firma hat an 2420 Kunden Waschmaschinen geliefert. Mit wie vielen Kunden, die Kosten verursachen, muss die Firma im Laufe eines Jahres ungefähr rechnen?
- b) Die Firma bietet ihren Kunden einen Wartungsvertrag an, das heißt, der Kunde zahlt einen festen Betrag pro Jahr, und anfallende Reparaturen werden nicht berechnet. Welchen jährlichen Beitrag sollte die Firma mindestens verlangen, um langfristig keinen Verlust zu machen?

**Viel Erfolg!**

Name: \_\_\_\_\_

**Beachte: Zu einer Lösung gehört auch immer die Angabe des Lösungsweges.**

**1. Aufgabe**

- a) Zeichne in ein Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 cm; x zwischen -4 und 7, y zwischen -1 und 9) die Punkte A (-1 | 8), B (2,5 | 1) und C (4 | 5) ein!
- b) Welche besondere Eigenschaft haben alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $\overline{AB}$  liegen?
- c) Konstruiere den Punkt P, der von den beiden Punkten A und B gleich weit entfernt ist und der außerdem auf der Geraden durch B und C liegt. Erläutere deine Konstruktion.

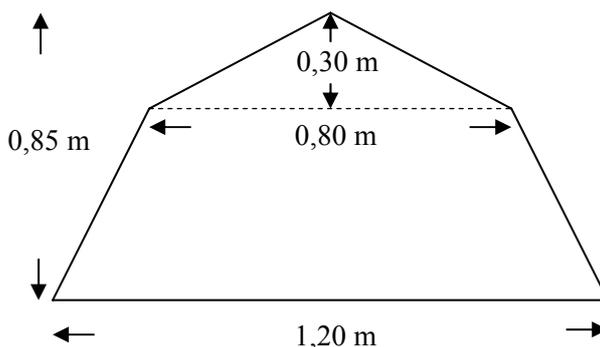
**2. Aufgabe**

In einer Forschungsstation liefert ein Benzinmotor die nötige Energie. Der Motor braucht 2,4 Liter Benzin pro Stunde, der Tank fasst 380 Liter.

- a) Berechne, wie lange der Motor laufen kann, wenn der Tank am Anfang voll ist.
- b) Nach 60 Stunden Betrieb tritt in den Leitungen ein kleines Leck auf, das zu einem Verlust von 0,8 Liter pro Stunde führt. Reicht es, wenn das Versorgungsfahrzeug 6 Tage nach dem Anlassen des Motors wiederkommt, wie es ursprünglich vorgesehen war? Begründe deine Antwort.

**3. Aufgabe**

Herr Müller will in seinem Dach ein besonders geformtes Dachfenster einbauen. Dazu muss er zunächst die passende Öffnung in Dachverkleidung sägen. Dafür enthält der Bausatz eine Schablone:



**Umriss der Fensterfläche**

Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht!

- a) Zeige, dass die Fläche, die Herr Müller aussägen muss, einen Flächeninhalt von  $0,67 \text{ m}^2$  hat.
- b) Hinter der Verkleidung befindet sich Dämmmaterial von 30 cm Tiefe. Welches Volumen an Dämmmaterial muss Herr Müller entfernen?

**4. Aufgabe**

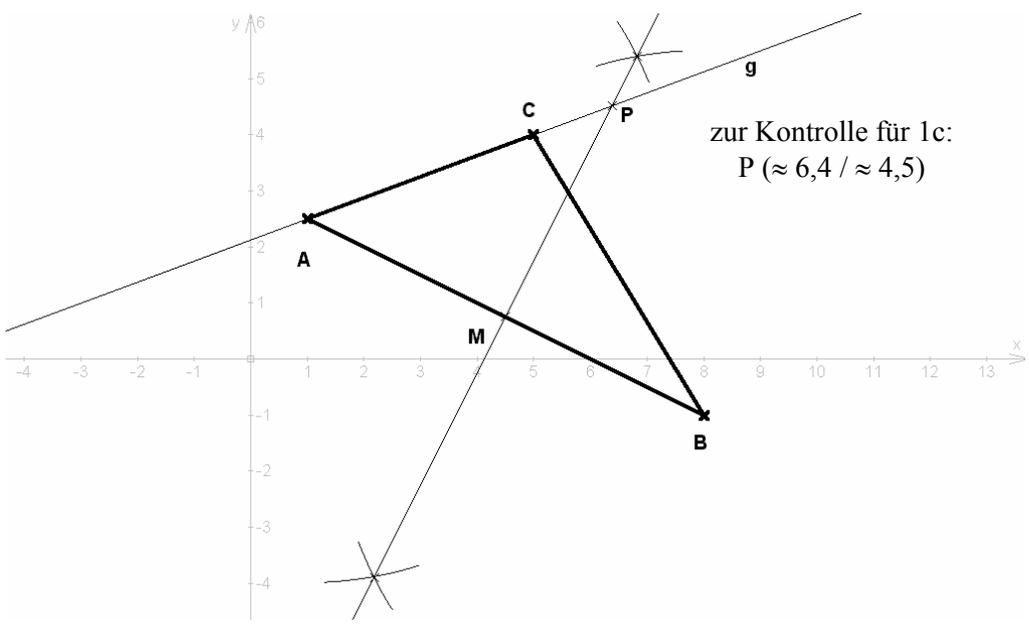
Eine Firma, die Waschmaschinen verkauft, hat in langjähriger Erfahrung festgestellt, dass bei ihren Kunden für Reparaturen der gelieferten Waschmaschinen jährlich folgende Kosten mit folgenden Wahrscheinlichkeiten anfallen:

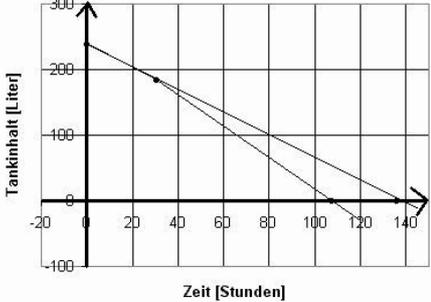
Kosten in €	0	40	60	80	120	150
Wahrscheinlichkeit	36%	10%	15%	20%	12%	7%

- a) Die Firma hat an 2450 Kunden Waschmaschinen geliefert. Mit wie vielen Kunden, die Kosten verursachen, muss die Firma im Laufe eines Jahres ungefähr rechnen?
- b) Die Firma bietet ihren Kunden einen Wartungsvertrag an, das heißt, der Kunde zahlt einen festen Betrag pro Jahr, und anfallende Reparaturen werden nicht berechnet. Welchen jährlichen Beitrag sollte die Firma mindestens verlangen, um langfristig keinen Verlust zu machen?

**Viel Erfolg!**

## Vergleichsarbeit 8. Klassenstufe 2004 Form A – Lösungen

	<p>Allgemein muss festgestellt werden, dass zwar bei allen Aufgaben der Anspruch besteht, von den Schülerinnen und Schülern nicht nur Ergebnisse, sondern auch Begründungen und zusammenhängende Darstellungen zu bekommen, aber Achtklässler sind hier erst auf dem Wege. Die Strenge der Darstellung, wie sie in diesen Lösungsvorschlägen angestrebt wurde, kann so natürlich nicht erwartet werden. Von den nachfolgenden Vorschlägen abweichende richtige Lösungswege und originelle Teilgedanken sind durchaus erwünscht und gehen positiv in die Bewertung ein.</p>	Bewertung
<p>1.</p>	<p>a) Zeichnen des Koordinatensystems, Eintragen der Punkte (Verbindungslinien optional), je Fehler (z.B. Vertauschen der Koordinaten) 1 Punkt Abzug.</p>  <p>zur Kontrolle für 1c: P (<math>\approx 6,4</math> / <math>\approx 4,5</math>)</p> <p>b) Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten der Strecke <math>\overline{AB}</math> sind von A und B jeweils gleich weit entfernt <i>oder ähnliche Formulierungen</i>.</p> <p>c) Die Gerade g durch A und C wird mit einem Lineal konstruiert. Da alle Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, auf der Mittelsenkrechten der Strecke <math>\overline{AB}</math> liegen, ergibt sich der gesuchte Punkt P als Schnittpunkt von g und der konstruierten Mittelsenkrechten von <math>\overline{AB}</math>.</p> <p>(4 Punkte für die Konstruktion von P: Toleranz <math>\pm 1\text{mm}</math>, sonst 1 P. Abzug; Erläuterung: 2 Punkte)</p> <p>Die Mittelsenkrechte kann mit dem Geodreieck über den Mittelpunkt M von <math>\overline{AB}</math> konstruiert werden oder mit Zirkel und Lineal über die Schnittpunkte zweier Kreise mit gleichem hinreichend großen Radius und den Mittelpunkten A bzw. B. Die Zeichnung gibt den Fall der Konstruktion mit Zirkel und Lineal wieder.</p>	<p>4</p> <p>2</p> <p>6</p>
<p>2.</p>	<p>a) <b>Ansatz 1</b> – Die Laufzeitberechnung als Division der Tankmenge durch den Treibstoffverbrauch pro Zeit durch Verwendung einer Grundvorstellung: Die Rechnung <math>240 : 1,8 = 133\frac{1}{3}</math> muss erkennbar sein.</p> <p><b>Ansatz 2</b> – Gleichung</p> $240 = 1,8 \cdot t \quad   :1,8$ $t = 240 : 1,8 = 133\frac{1}{3}$	

<p><b>Ansatz 3</b> – Dreisatz:  <math>1,8 \text{ l} \triangleq 1 \text{ h}</math>  <math>1 \text{ l} \triangleq 1 : 1,8 \text{ h}</math>  <math>240 \text{ l} \triangleq 240 : 1,8 \text{ h} = 133\frac{1}{3} \text{ h}</math></p>	<p><b>Ansatz 4</b> – Aufstellen der Funktionsgleichung und Nullstellenbestimmung:  <math>\text{benzinmenge}(t) = 240 - 1,8 \cdot t</math>  <math>t_{\text{leer}} = \frac{240}{1,8} = 133\frac{1}{3}</math></p>		
<p><b>Ansatz 5</b> – Graphische Darstellung</p> 	<p>hier Teil a) und Teil b); die Funktion aus b) lautet  <math>\text{menge}_2(t) = 186 - 2,4 \cdot (t - 30)</math></p>	4	
<p><b>Antwort:</b>          Der Motor kann mit anfänglich vollem Tank <math>133\frac{1}{3} \text{ h} = 5 \text{ Tage } 13\frac{1}{3} \text{ h}</math> laufen.  <i>(Es sind hier einige Beispielrechenwege aufgeführt. Jeder sinnvolle andere Rechenweg führt auch zu voller Punktzahl.)</i></p> <p>b) Nach 30 h sind <math>30 \cdot 1,8 \text{ l} = 54 \text{ l}</math> verbraucht, damit sind noch <math>240 \text{ l} - 54 \text{ l} = 186 \text{ l}</math> übrig. Anschließend werden durch den Verbrauch und den Verlust 2,4 Liter pro Stunde benötigt. Mit diesem „Verbrauch“ läuft der Motor nun noch <math>(186 : 2,4) \text{ h} = 77,5 \text{ h}</math>. Insgesamt kann der Motor <math>30 \text{ h} + 77,5 \text{ h} = 107,5 \text{ h}</math> laufen. Das sind weniger als 5 Tage = 120 h.          Es reicht also nicht, wenn das Versorgungsfahrzeug 5 Tage nach Anlassen des Motors kommt.  <i>In der Musterlösung ist relativ viel Text. Auch eine Lösung mit weniger Text, die sinnvoll nachvollziehbar ist und das Ergebnis mit einem Antwortsatz kommentiert, führt zur vollen Punktzahl.          Ergebnisse in Dezimalzahlen und/oder sinnvolle Rundungen im Antwortsatz, wie z. B. im Teil a) ungefähr <math>5\frac{1}{2}</math> Tage, sind auch als richtig zu bewerten.</i></p>			1  5  1
3.	<p>a) Das Fenster hat die Form eines Trapezes mit aufgesetztem Dreieck. Die beiden parallelen Seiten des Trapezes haben Längen von 1,40 m und von 0,60 m; die Höhe des Trapezes ergibt sich aus der Zeichnung zu 0,40 m. Mit der Flächenformel für das Trapez <math>A_{\text{Tr}} = \frac{a+c}{2} \cdot h</math> ergibt sich ein Flächeninhalt von <math>A_{\text{Tr}} = 0,4 \text{ m}^2</math>.          Das aufgesetzte Dreieck hat eine Grundkantenlänge von 0,60 m und eine Höhe von 0,30 m. Sein Flächeninhalt ist damit <math>A_{\text{Dr}} = \frac{g \cdot h}{2} = 0,09 \text{ m}^2</math>.          Insgesamt hat die auszusägende Fläche damit einen Inhalt von <math>A = 0,49 \text{ m}^2</math>.</p> <p>b) Das Volumen lässt sich über <math>V = A \cdot t</math> berechnen (t ist die Tiefe des Dämmmaterials).          Damit sind <math>V = 0,098 \text{ m}^3 = 98 \text{ dm}^3</math> Dämmmaterial zu entfernen.  <i>(Auch ohne explizite Behandlung des Prismas kann dieser Ansatz erwartet werden.)</i></p>	1  3  2  1  2	

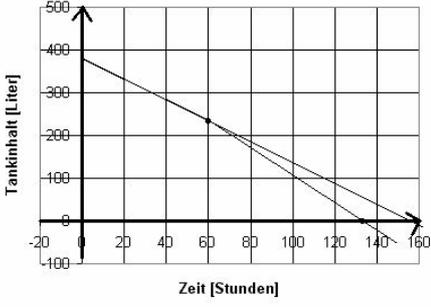
4.	<p>a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde Wartungskosten verursacht, beträgt: <math>1 - 0,35 = 0,65</math>. Diese kann als Prognosewert für die entsprechende relative Häufigkeit solcher Kunden in einem Jahr verwendet werden. Die gesuchte absolute Häufigkeit für diese Kunden ergibt sich als Produkt aus der relativen Häufigkeit und der Gesamtzahl an Kunden (Versuchen) also: <math>h = 2420 \cdot 0,65 = 1573 \approx 1600</math>.</p> <p>Die Firma muss mit ungefähr 1600 Kunden rechnen, die Kosten verursachen. Diese grobe Rundung ist sinnvoll, da es sich um einen Schätzwert bei relativ kleiner Versuchszahl handelt.</p> <p><i>Schülerantworten, die den genauen Wert dieser Multiplikation nennen, sind als richtig zu werten, aber eben auch die grobe Schätzung oder eine Rundung auf ganze Zehner, die von höherem Verständnis zeugt, was aber hier keine Berücksichtigung finden soll. Eine präzise Argumentation über den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit wird natürlich nicht erwartet, aber die bloße Rechnung ist auch nicht ausreichend.</i></p> <p><i>(2 Punkte Ansatz / Überlegung / Rechnung, 1 Punkt sinnvolle Antwort).</i></p> <p>b) Der Erwartungswert der Kosten kann bei hoher Kundenzahl als bester Prognosewert für den (arithmetischen) Kostenmittelwert verwendet werden und damit als gute Kalkulationsgrundlage für den Preis des Wartungsvertrages, um langfristig weder Gewinn noch Verlust zu machen.</p> <p>Der Erwartungswert der Reparaturkosten für einen Kunden in € beträgt:  <math>E = 0 \cdot 0,35 + 40 \cdot 0,05 + 60 \cdot 0,2 + 80 \cdot 0,23 + 120 \cdot 0,1 + 150 \cdot 0,07 = 54,90</math>.</p> <p>Damit die Firma langfristig keinen Verlust macht, sollte sie mindestens 54,90 € für den Jahresbeitrag verlangen.</p> <p><i>Eine präzise Argumentation über den Zusammenhang zwischen Erwartungswert und mittleren Kosten pro Kunde wird auch hier nicht erwartet, aber die bloße Rechnung ist auch hier nicht ausreichend.</i></p> <p><i>(2 Punkte Argumentation bis zum Ansatz für den Erwartungswert, 3 Punkte Berechnung, 1 Punkt sinnvolle Antwort).</i></p>	3
	Form – hierzu gehören Korrektheit in der mathematischen Symbolik, aber auch Sauberkeit der Darstellung.	2
	Gesamt	43

Wertung:

<b>Zensur</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>Punkte</b>	<b>43 – 40</b>	<b>39 – 34</b>	<b>33 – 28</b>	<b>27 – 21</b>	<b>20 – 11</b>	<b>10 – 0</b>

## Vergleichsarbeit 8. Klassenstufe 2004 Form B – Lösungen

	Allgemein muss festgestellt werden, dass zwar bei allen Aufgaben der Anspruch besteht, von den Schülerinnen und Schülern nicht nur Ergebnisse, sondern auch Begründungen und zusammenhängende Darstellungen zu bekommen, aber Achtklässler sind hier erst auf dem Wege. Die Strenge der Darstellung, wie sie in diesen Lösungsvorschlägen angestrebt wurde, kann so natürlich nicht erwartet werden. Von den nachfolgenden Vorschlägen abweichende richtige Lösungswege und originelle Teilgedanken sind durchaus erwünscht und gehen positiv in die Bewertung ein.	Bewertung
1.	<p>a) Zeichnen des Koordinatensystems, Eintragen der Punkte (Verbindungslinien optional), je Fehler (z.B. Vertauschen der Koordinaten) 1 Punkt Abzug.</p> <p>zur Kontrolle für 1c: P (<math>\approx 4,5 / \approx 6,4</math>)</p> <p>a) Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten der Strecke <math>\overline{AB}</math> sind von A und B jeweils gleich weit entfernt <i>oder ähnliche Formulierungen</i>.</p> <p>b) Die Gerade g durch B und C wird mit einem Lineal konstruiert. Da alle Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, auf der Mittelsenkrechten der Strecke <math>\overline{AB}</math> liegen, ergibt sich der gesuchte Punkt P als Schnittpunkt von g und der konstruierten Mittelsenkrechten von <math>\overline{AB}</math>.</p> <p>(4 Punkte für die Konstruktion von P: Toleranz <math>\pm 1\text{mm}</math>, sonst 1 P. Abzug; Erläuterung: 2 Punkte)</p> <p><i>Die Mittelsenkrechte kann mit dem Geodreieck über den Mittelpunkt M von <math>\overline{AB}</math> konstruiert werden oder mit Zirkel und Lineal über die Schnittpunkte zweier Kreise mit gleichem hinreichend großen Radius und den Mittelpunkten A bzw. B. Die Zeichnung gibt den Fall der Konstruktion mit Zirkel und Lineal wieder.</i></p>	4
2.	<p>a) <b>Ansatz 1</b> – Die Laufzeitberechnung als Division der Tankmenge durch den Treibstoffverbrauch pro Zeit unter Verwendung einer Grundvorstellung: Die Rechnung <math>380 : 2,4 = 158\frac{1}{3}</math> muss erkennbar sein.</p> <p><b>Ansatz 2</b> – Gleichung <math>380 = 2,4 \cdot t \quad   : 2,4</math> <math>t = 380 : 2,4 = 158\frac{1}{3}</math></p>	

<p><b>Ansatz 3 – Dreisatz</b>  <math>2,4 \text{ l} \triangleq 1 \text{ h}</math>  <math>1 \text{ l} \triangleq 1:2,4 \text{ h}</math>  <math>380 \text{ l} \triangleq 380:2,4 \text{ h} = 158\frac{1}{3} \text{ h}</math></p>	<p><b>Ansatz 4 – Aufstellung der Funktionsgleichung und Nullstellenbestimmung</b>  <math>\text{benzinmenge}(t) = 380 - 2,4 \cdot t</math>  <math>t_{\text{leer}} = \frac{380}{2,4} = 158\frac{1}{3}</math></p>	
<p><b>Ansatz 5 – Graphische Darstellung</b></p>  <p><b>Antwort:</b>  Der Motor kann mit anfänglich vollem Tank <math>158\frac{1}{3} \text{ h} = 6 \text{ Tage } 14\frac{1}{3} \text{ h}</math> laufen.  <i>(Es sind hier einige Beispielrechenwege aufgeführt. Jeder sinnvolle andere Rechenweg führt auch zu voller Punktzahl.)</i></p> <p>b) Nach 60 h sind <math>60 \cdot 2,4 \text{ l} = 144 \text{ l}</math> verbraucht, damit sind noch <math>380 - 144 \text{ l} = 236 \text{ l}</math> übrig. Anschließend werden durch den Verbrauch und den Verlust 3,2 Liter pro Stunde benötigt. Mit diesem „Verbrauch“ läuft der Motor nun noch <math>(236 : 3,2) \text{ h} = 73,75 \text{ h}</math>. Insgesamt kann der Motor <math>60 \text{ h} + 73,75 \text{ h} = 133,75 \text{ h}</math> laufen. Das sind weniger als <math>6 \text{ Tage} = 144 \text{ h}</math>. Es reicht also nicht, wenn das Versorgungsfahrzeug 6 Tage nach Anlassen des Motors kommt.</p> <p><i>In der Musterlösung ist relativ viel Text. Auch eine Lösung mit weniger Text, die nur sinnvoll nachvollziehbar ist und das Ergebnis mit einem Antwortsatz kommentiert, führt zur vollen Punktzahl. Ergebnisse in Dezimalzahlen und/oder sinnvolle Rundungen im Antwortsatz, wie z. B. im Teil a) ungefähr <math>6\frac{1}{2}</math> Tage, sind auch als richtig zu bewerten.</i></p>	<p>hier Teil a) und Teil b); die Funktion aus b) lautet <math>\text{menge}_2(t) = 236 - 3,2 \cdot (t - 60)</math></p>	<p>4</p> <p>1</p> <p>5</p> <p>1</p>
<p>3. a) Das Fenster hat die Form eines Trapezes mit aufgesetztem Dreieck. Die beiden parallelen Seiten des Trapezes haben Längen von 1,20 m und von 0,80 m; die Höhe des Trapezes ergibt sich aus der Zeichnung zu 0,55 m. Mit der Flächenformel für das Trapez <math>A_{\text{Tr}} = \frac{a+c}{2} \cdot h</math> ergibt sich ein Flächeninhalt von <math>A_{\text{Tr}} = 0,55 \text{ m}^2</math>. Das aufgesetzte Dreieck hat eine Grundkantenlänge von 0,80 m und eine Höhe von 0,30 m. Sein Flächeninhalt ist damit <math>A_{\text{Dr}} = \frac{g \cdot h}{2} = 0,12 \text{ m}^2</math>. Insgesamt hat die auszusägende Fläche damit einen Inhalt von <math>A = 0,67 \text{ m}^2</math>.</p> <p>b) Das Volumen lässt sich über <math>V = A \cdot t</math> berechnen (t ist die Tiefe des Dämmmaterials). Damit sind <math>V = 0,201 \text{ m}^3 = 201 \text{ dm}^3</math> Dämmmaterial zu entfernen. <i>(Auch ohne explizite Behandlung des Prismas kann dieser Ansatz erwartet werden.)</i></p>		<p>1</p> <p>3</p> <p>2</p> <p>1</p> <p>2</p>

