Bezirksregierung Düsseldorf

Lösungen zum

Reader Abituraufgaben

(Lösungen zu Aufgaben aus dem Regierungsbezirk Düsseldorf)

Vorwort

In diesem Lösungsband sind die Lösungen derjenigen Aufgaben aufgeführt, die im Regierungsbezirk Düsseldorf entstanden sind.
Konkret sind das die Aufgaben

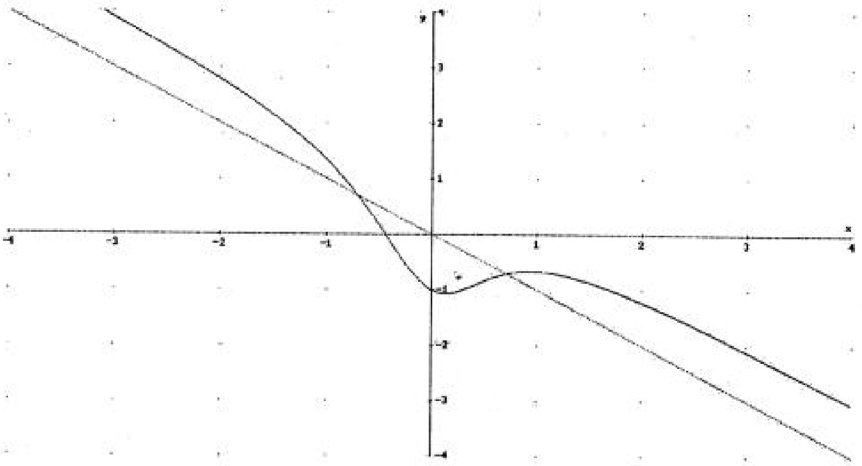
Wir hoffen, damit dem Wunsch nach Lösungen zu dem Abituraufgabenreader zumindest teilweise erfüllen zu können.
Leider liegen uns die Lösungen von Aufgaben aus den anderen Regierungsbezirken nicht vor.

Düsseldorf im Januar 2007

N. Stirba, Fachdezernent Mathematik

	I	II	III
a) Gemeinsamkeiten: i. (mindestens?) eine Nullstelle ii. gemeinsame Asymptote iii. 2 Wendepunkte iv. gemeinsamer Punkt P(0/ -1)	3	3	
Unterschiede: keinen oder zwei Extrempunkte			
b) <u>Vermutung:</u> P(0/ -1) ist der einzige Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen. <u>Nachweis:</u> Sei x $\neq 0$: $\frac{x^2-k_1}{x^2+k_1}-x=\frac{x^2-k_2}{x^2+k_2}-x$ $\Rightarrow (x^2-k_1)(x^2+k_2)=(x^2-k_2)(x^2+k_1)$ $\Rightarrow (k_2-k_1)\cdot x^2=(k_1-k_2)\cdot x^2 \quad \Rightarrow (k_2-k_1)=(k_1-k_2)$, da $x\neq 0 \Rightarrow k_1=k_2$		5	
Da $f_k(0)=-1$ unabhängig von k ist, ist der Nachweis dafür erbracht, dass sich je zwei Funktionsgraphen nur in diesem Punkt schneiden.			
c) $f_k''(x)\overset{TR}{=}\frac{-4(3x^2-k)\cdot k}{(x^2+k)^3} \quad f_k'''(x)\overset{TR}{=}\frac{48(x^2-k)\cdot kx}{(x^2+k)^4}$	3		
$f_k''(x)=0 \quad \overset{TR}{\Leftrightarrow} \quad x=\frac{-\sqrt{3k}}{3} \vee x=\frac{\sqrt{3k}}{3}.$	2	2	
Da in beiden Fällen die 3. Ableitung ungleich Null $(-/+\frac{27\sqrt{3}}{8\sqrt{k^3}}.)$ ist, liegen Wendestellen vor.	2		
Damit sogar ein Sattelpunkt vorliegt, muss auch die 1. Ableitung an diesen Stellen Null werden: $f_k'(\frac{-\sqrt{3k}}{3}) \overset{TR}{=} \frac{-9\cdot(\frac{16k^2}{9}+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{k^3})}{16k^2}\neq 0$ für alle $k>0$ $f_k'(\frac{\sqrt{3k}}{3}) \overset{TR}{=} \frac{-9\cdot(\frac{16k^2}{9}-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{k^3})}{16k^2}=0$ für alle $k>0$ $\Rightarrow \frac{16k^2}{9}-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{k^3}=0 \quad \overset{TR}{\Rightarrow} \quad k=\frac{27}{16}.$	2	1	
Nur für $k=\frac{27}{16}$ ist gleichzeitig auch die 1. Ableitung gleich Null und es liegt somit ein Sattelpunkt vor.	2	3	
d) Berechnung der Schnittstellen: $f_k(x)=g(x)$ $\frac{x^2-k}{x^2+k}=0 \Rightarrow x^2-k=0 \Rightarrow x=\sqrt{k} \vee x=-\sqrt{k}$	2		
Für die Fläche ergibt sich somit: $\left\|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}\frac{x^2-k}{x^2+k}dx\right\|\overset{TR}{=}\left\|2\sqrt{k}-\pi\sqrt{k}\right\|=(\pi-2)\sqrt{k}\approx 1{,}14\sqrt{k}$ FE	2	2	

Skizze:



2

e) e_1) Nullstelle: $\frac{x^2-0{,}5}{x^2+0{,}5}-x=0 \overset{TR}{\Rightarrow} -2x^3+2x^2-x-1=0$ 2

Mit Hilfe des TR wird näherungsweise die negative Nullstelle bestimmt. Dazu ist – anhand der Zeichnung – ein geeignetes Intervall anzugeben: $[-1\,;0\,]$. $\overset{TR}{\Rightarrow}\ x\approx -0{,}4406$ 1 3

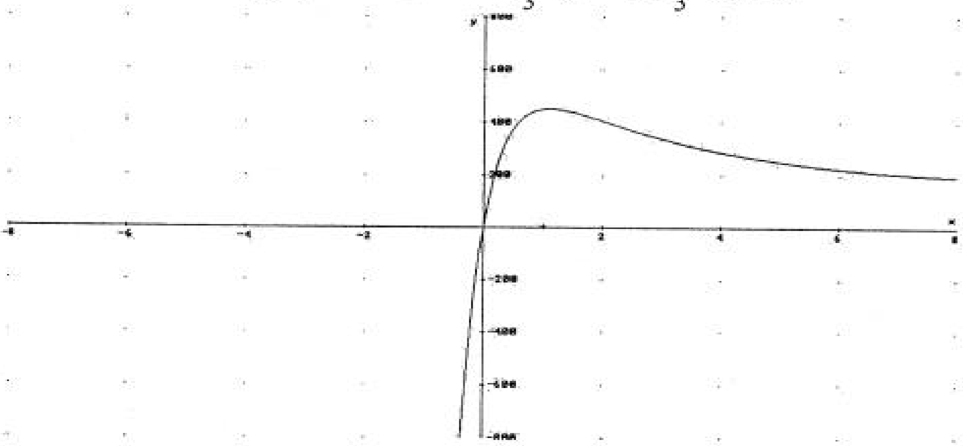
Gesuchter Flächeninhalt:

$$A_{0,5}=\left|\int_{-0{,}4406}^{0}\left(\frac{x^2-0{,}5}{x^2+0{,}5}-x\right)dx\right|\overset{TR}{=}\left|-0{,}2504\right|=0{,}2504\ \text{FE}$$ 3

e_2) Die Flächen liegen alle im Dreieck ABC mit A(0/0), B(-1/ 0) und C(0/ -1). Also gilt: $A_k \le \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$. 4

ΣA1	26	19	4
%	53	39	8

	I	II	III
a) $\begin{array}{cc} & \text{von} \\ & \begin{array}{cccc} K & G & WG & V \end{array} \\ \text{nach} \begin{array}{c} K \\ G \\ WG \\ V \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}72 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}08 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \end{array}$	3		
c) b_1) Die Übergangsmatrix für einen Fünf-Wochen-Zeitraum lautet: $A^5 \overset{TR}{=} \begin{pmatrix} 0{,}0987 & 0{,}1603 & 0{,}1084 & 0 \\ 0 & 0{,}1681 & 0 & 0 \\ 0{,}7803 & 0{,}5933 & 0{,}8573 & 0 \\ 0{,}1211 & 0{,}0783 & 0{,}0344 & 1 \end{pmatrix}$	3		
Die Werte werden der Matrix A^5 entnommen: b_2) 16,81% b_3) 7,83%		2	
c) Startvektor $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A^3 \cdot \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 333{,}9 \\ 514{,}5 \\ 583{,}2 \\ 68{,}4 \end{pmatrix}$	2	1	
c_1) Situation nach drei Wochen: Kranke: ca. 334 Personen Gesunde: ca. 515 Personen wieder gesund: ca. 583 Personen verstorben: ca. 68 Personen	1		
c_2) langfristige Entwicklung (durch TR-Überprüfung): Auf Dauer gesehen wird die Population aussterben.			2
d) d_1) verkürzte Übergangsmatrix: $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$;	2		
d_2) Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren: $B - k \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0{,}2-k & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7-k & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}9-k \end{pmatrix}$		2	
Damit ergibt sich folgende charakteristisch Gleichung: $0 = \lvert B - k \cdot E_3 \rvert = (0{,}2-k)(0{,}7-k)(0{,}9-k) - 0{,}1 \cdot (0{,}7-k) \cdot 0{,}8 = -k^3 + 1{,}8k^2 - 0{,}87k + 0{,}07$ $= (0{,}7 - k) \cdot (k^2 - 1{,}1k + 0{,}1) = (0{,}7-k)(k-1)(k-0{,}1)$ Als Eigenwerte ergeben sich somit: $k_1 = 0{,}7$; $k_2 = 1$; $k_3 = 0{,}1$. Für die zugehörigen Eigenvektoren ergibt die Rechnung:	3	3	
Zu k_1: $\left\lvert \begin{array}{r} 0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}1z = 0{,}7x \\ 0{,}7y = 0{,}7y \\ 0{,}8x + 0{,}9z = 0{,}7z \end{array} \right\rvert \Rightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{1}{4}z \\ y = -\frac{3}{4}z \end{array} \Rightarrow \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$	2	1	

Zu k_2: Das entsprechende GLS führt zu $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$	2	1	
Zu k_3: Das entsprechende GLS führt zu $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	1	
d_3) Darstellung des Startvektors $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Eigenvektoren: $r \cdot \vec{w}_1 + s \cdot \vec{w}_2 + t \cdot \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \end{pmatrix}$			
Mit dem TR ergibt sich: $r = 500 \quad s = 166\frac{2}{3} \quad t = 666\frac{2}{3}$		2	
Damit erhält man: $\vec{v}_n = A^n \cdot \vec{v}_0 = 500 \cdot k_1{}^n \cdot \vec{w}_1 + 166\frac{2}{3} k_2{}^n \cdot \vec{w}_2 + 666\frac{2}{3} \cdot k_3{}^n \cdot \vec{w}_3$	2	1	
Die erste Komponente von $\vec{v}_n$ liefert den Krankenbestand nach n Wochen: $500 \cdot 0{,}7^n + 166\frac{2}{3} - 666\frac{2}{3} \cdot 0{,}1^n$		2	
Die auf $\mathbb{R}_0^+$ erweiterte Funktion lautet somit: $f(x) = 500 \cdot 0{,}7^x - 666\frac{2}{3} \cdot 0{,}1^x + 166\frac{2}{3} \quad ; x \geq 0.$	1		
	2		
Zu bestimmen ist die Wendestelle von f:			2
$f''(x) = 500 \cdot \left(\ln(0{,}7)^2\right) 0{,}7^x - 666\frac{2}{3} \cdot \left(\ln(0{,}1)^2\right) 0{,}1^x \quad ; \quad f''(x) = 0 \overset{TR}{\Rightarrow} x \approx 2{,}065$	1	2	
$f''(2{,}065) \overset{TR}{>} 0$. Der Krankenstand nimmt nach zwei Wochen am stärksten ab.		2	
d_4) Da $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 166\frac{2}{3}$ ist, nähert sich der Krankenstand diesem Wert.		2	
Σ**A4**	26	22	4
%	50	42	8

1.) Es gilt $A\cdot\begin{pmatrix}80000\\20000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}76000\\24000\end{pmatrix}$ und $A\cdot\begin{pmatrix}76000\\24000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}73200\\26800\end{pmatrix}$.

Mit $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ ergeben sich die Gleichungen

I $\quad 80000a+20000b=76000 \Rightarrow b=3{,}8-4a$

II $\quad 80000c+20000d=24000 \Rightarrow d=1{,}2-4c$

III $\quad 76000a+24000b=73200$

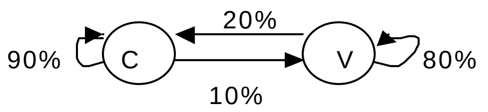
IV $\quad 76000c+24000d=26800$

b eingesetzt in III ergibt $a=0{,}9$; d eingesetzt in IV ergibt $c=0{,}1$

$\Rightarrow b=0{,}2 \quad d=0{,}8$

Also $A=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}2\\0{,}1 & 0{,}8\end{pmatrix}$.

Diagramm:



Verteilung für 2005: $A\cdot\begin{pmatrix}73200\\26800\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}71240\\28760\end{pmatrix}$, d.h. 71240 leben in der City, 28760 in den Vororten.

Verteilung für 2010: $A\cdot\begin{pmatrix}71240\\28760\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}69868\\30132\end{pmatrix}$, d.h. 69868 leben in der City, 30132 in den Vororten.

Für den Verteilungsvektor $\vec{x}$ von 1985 gilt $A\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}80000\\20000\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}80000\\20000\end{pmatrix}$.

Bestimme A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0{,}9 & 0{,}2 & 1 & 0\\0{,}1 & 0{,}8 & 0 & 1\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc}0{,}9 & 0{,}2 & 1 & 0\\0 & 0{,}7 & -0{,}1 & 0{,}9\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc}-0{,}63 & 0 & -0{,}72 & 0{,}18\\0 & 0{,}7 & -0{,}1 & 0{,}9\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{2}{7}\\0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7}\end{array}\right)$$

Damit ist $A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}80000\\20000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}85714\frac{2}{7}\\14285\frac{5}{7}\end{pmatrix}$. 1985 lebten ca. 85714 Leute in der City, 14286 in den Vororten.

2.) Für die stationäre Verteilung gilt: $A\cdot\vec{x}=\vec{x}$, also $\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}2\\0{,}1 & 0{,}8\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

$$-0{,}1x+0{,}2y=0$$
$$0{,}1x-0{,}2y=0$$

Damit x=2y und $\vec{x}=r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Da außerdem x+y=1, folgt $2r + r = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$ und damit ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ die stationäre Verteilung.

Bezogen auf 100000 Einwohner heißt das: ca. 66667 Bewohner in der City und 33333 in den Vororten.

Für die stochastische Grenzmatrix G gilt:

$G = \lim_{n \to \infty} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ denn diese stimmt in den Spalten überein, jede Spalte stellt die stationäre Verteilung dar, G multipliziert mit einem Verteilungsvektor verändert diesen nicht.

Langfristig ist mit $\frac{2}{3}$ City- und $\frac{1}{3}$ Vorortbewohner zu rechnen.

3.) $k \in IR$ ist Eigenwert der Matrix A, wenn gilt $A \cdot \vec{x} = k \cdot \vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = k \cdot \vec{x} \Leftrightarrow (0,9 - k)x + 0,2y = 0 \wedge 0,1x + (0,8 - k)y = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,9-k & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,8-k & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0,9-k & 0,2 & 0 \\ 0 & k^2 - 1,7k + 0,7 & 0 \end{array}\right)$$

Das homogene LGS hat außer der trivialen Lösung eine Lösung, wenn gilt

$$k^2 - 1,7k + 0,7 = 0 \Leftrightarrow k = 0,85 \pm \sqrt{0,0225} \Leftrightarrow k = 1 \vee k = 0,7$$

k=1 bzw. k=0,7 sind die Eigenwerte der Matrix A.

Eigenvektor zum Eigenwert k_1=1: $(0,9 - 1) \cdot x + 0,2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y \Rightarrow \vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eigenvektor zum Eigenwert k_2=0,7: $0,2x + 0,2y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow \vec{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.) Z.Z. ist: Die stationäre Verteilung der Matrix A ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} \\ \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$.

$$A \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

$$(1-p)x + qy = x \wedge px + (1-q)y = y$$

$-px + qy = 0 \wedge px - qy = 0 \Rightarrow x = \frac{q}{p}y$, da x+y=1 gilt

$\frac{q}{p}y + y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{p}{q+p}$. Damit: $x = \frac{q}{q+p}$.

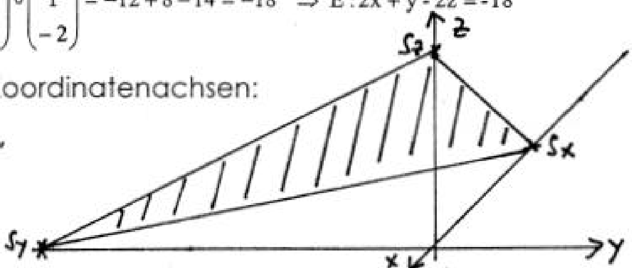
$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{q}{q+p} \\ \frac{p}{q+p} \end{pmatrix}$ Da die stationäre Verteilung die Spalten der Grenzmatrix angibt, hat G die gegebene Form.

5.) Z.Z. ist für alle $p, q \in IR$ gilt (a) $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1-p-q)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und (b) $A \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

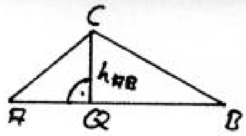
(a) $\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+p+q \\ -p+1-q \end{pmatrix} = (1-p-q)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q-pq+pq \\ pq+p-pq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

	I	II	III
a) Gegeben sind die Punkte A(- 6 ; 8 ; 7), B(- 3 ; - 4 ; 4), C(1 ; - 8 ; 6). Für die Parametergleichung ergibt sich: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix}$	3		
Bestimmung eines Normalenvektors mithilfe des Vektorproduktes: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix}$. Jedes Vielfache ist auch ein Normalenvektor.	3	2	
$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \vec{a} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -12 + 8 - 14 = -18 \quad \Rightarrow \text{E}: 2x + y - 2z = -18$			
b) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: S_x (x/0/0) $\Rightarrow$ 2x=-18 $\Rightarrow$ x=-9, S_y (0/y/0) $\Rightarrow$ y=-18, S_z (0/0/z) $\Rightarrow$ z=9  	2	2	
c) Die Punktprobe mit D(9 ; - 4 ; - 2) ergibt: $2 \cdot 9 + 1 \cdot (-4) - 2 \cdot (-2) = 18 \neq -18$.	2		
D ist kein Punkt der Ebene E. Mit der Hesseschen-Normalform ergibt sich für den Abstand d des Punktes D von der Ebene E: $d = \left\| \frac{2 \cdot 9 + (-4) - 2 \cdot (-2) + 18}{3} \right\| = \frac{36}{3} = 12.$		2	
Die Gerade g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft senkrecht zu E durch den Punkt D.		3	
Für den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene gilt: 2(9+2t)+(-4+t)-2(-2-2t)= -18 $\Rightarrow$ 18 + 4t – 4 + t + 4 + 4t = -18 $\Rightarrow$ t = -4.	2	2	2
Der Punkt D' dieser Geraden zu t = -8 ist der gesuchte Punkt, den man durch Spiegelung des Punktes D an der Ebene E erhält. Man erhält: $\vec{d} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{D}'(-7/-12/14)$			
d) Gerade AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{162}$.	1		
Für die Höhe h zur Seite AB des Dreiecks ABC berechnet man: 1. Möglichkeit: (Projektionsverfahren) (bevorzugtes Verfahren!)			

$$\vec{h}_{AB} = \overrightarrow{CQ} = \vec{q} - \vec{c} = \begin{pmatrix}-6\\8\\7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-12\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-8\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\16\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-12\\-3\end{pmatrix}.$$



2

$$\overrightarrow{CQ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix}-7\\16\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-12\\-3\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}3\\-12\\-3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -21-192-3+r(9+144+9)=0 \Rightarrow r = 1\tfrac{1}{3}$$
$$-216-162r=0$$

2 2

$$\vec{h}_{AB} = \overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix}-7\\16\\1\end{pmatrix} + 1\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-12\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow |CQ| = \sqrt{18} \approx 4{,}24 \text{ LE.}$$

3

2. Möglichkeit: (Trigonometrie)

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{162}$ und $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{306}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}3\\-12\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}7\\-16\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{162}\sqrt{306}} = \frac{21+192+1}{\sqrt{162}\sqrt{306}} = \frac{216}{\sqrt{162}\sqrt{306}} \approx 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 14{,}04°$$

$$\sin\alpha = \frac{h_{AB}}{|\overrightarrow{AC}|} \Rightarrow h_{AB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin\alpha \approx 4{,}24 \text{ LE.}$$

Insgesamt erhält man für das Volumen der Dreieckspyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot h_{AB} \cdot h_d = \frac{1}{6}\sqrt{162} \cdot 4{,}24 \cdot 12 \approx 108 \quad \text{(V.E.)}$$

3

e) Geradenschar: $h_k: \ \vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\8\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1+2k\\2-2k\\2+k\end{pmatrix} \quad (t, k \in \mathbb{R})$

Einsetzen in die Koordinatengleichung der Ebenen E:

2(-6+t(1+2k)+(8+t(2-2k))-2(7+t(2+k)= -18

⇒ -12+2t+4kt+8+2t-2kt-14-4t-2kt=-18 ⇒ - 18 = - 18

⇒ Jede Gerade hat unendlich viele Schnittpunkte mit der Ebene

⇒ Jede Gerade der Geradenschar liegt in der Ebene E.

4 2

f) Ist die Gerade AC eine Gerade der Geradenschar?

Gerade AC:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\8\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\-16\\-1\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}-6\\8\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1+2k\\2-2k\\2+k\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}7=1+2k\\-16=2-2k\\-1=2+k\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}k=3\\k=9\\k=-3\end{matrix} \text{ (Widerspruch!)}$$

2 2

Die Gerade AC ist keine Gerade der Geradenschar.

$$h_5: \ \vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\8\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1+10\\2-10\\2+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\8\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}11\\-8\\7\end{pmatrix}$$

1

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}11\\-8\\7\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}7\\-16\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{234}\sqrt{306}} = \frac{77+128-7}{\sqrt{234}\sqrt{306}} = \frac{198}{\sqrt{234}\sqrt{306}} \approx 0{,}74 \Rightarrow \alpha = 42{,}3°$$

2 2

ΣA3	26	23	4
%	49	43	8

a) Übergangsmatrix Von den in Deutschland umlaufenden Münzen bleiben 88 % in

3/3

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}88 & 0{,}06 & 0{,}15 \\ 0{,}06 & 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Deutschland (D), 6 % gehen nach Frankreich (F), 6 % gehen in sonstige Länder (S). Von den in Frankreich umlaufenden Münzen gehen 6 % nach D, bleiben 90 % in F und gehen 4 % nach S.

Von den in sonstigen Ländern umlaufenden Münzen gehen 15 % nach D, 5 % nach F und bleiben 80 % in S.

b)

$$D_{03} = A \cdot D_{02} = \begin{pmatrix} 0{,}88 & 0{,}06 & 0{,}15 \\ 0{,}06 & 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Man erhält wie erwartet, dass nach einem Jahr 88 % der deutschen Münzen in D, 6 % in F und 6 % in S befinden.

$$D_{04} = A \cdot D_{03} = \begin{pmatrix} 0{,}88 & 0{,}06 & 0{,}15 \\ 0{,}06 & 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 88 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78{,}7 \\ 10{,}98 \\ 10{,}32 \end{pmatrix}$$

Nach zwei Jahren befinden sich 78,7 % der deutschen Münzen in D, 10,98 % in F und 10,32 % in S

6/6

Die **2 -** jährige Übergangsmatrix ist $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0{,}787 & 0{,}1128 & 0{,}255 \\ 0{,}1098 & 0{,}8156 & 0{,}094 \\ 0{,}1032 & 0{,}0716 & 0{,}651 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$D_{06} = A^2 \cdot D_{04} \approx \begin{pmatrix} 65{,}807 \\ 18{,}567 \\ 15{,}626 \end{pmatrix}$$

Zum 1.1.06 sind 65,8 % der deutschen Münzen in D, 18,6 % in F und 15,6 % in S

c) D stationäre Verteilung $\Rightarrow$ $A \cdot D = D$, dies führt zu dem homogenen LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}12 & 0{,}06 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}06 & -0{,}1 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & -0{,}2 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 7{,}5 & 0 \\ 6 & -10 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & -20 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 7{,}5 & 0 \\ 0 & -7 & 12{,}5 & 0 \\ 0 & 7 & -12{,}5 & 0 \end{array}\right)$$

6/6

$-14d_2 + 25d_3 = 0 \Rightarrow d_3 = \frac{14}{25} \cdot d_2$ **Sei** $d_2 = 25t \Rightarrow$

$d_3 = 14t \Rightarrow 6d_1 = 3 \cdot 25t + 7{,}5 \cdot 14t = 180t \Rightarrow$

$d_1 = 30t \Rightarrow L = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 14 \end{pmatrix}, t \in R \right\} \Rightarrow$ Mit $d_2 + d_2 + d_3 = 100$

ist $t = \frac{100}{69}$ und $D = 100 \cdot \begin{pmatrix} 10/23 \\ 25/69 \\ 14/69 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 43{,}48 \\ 36{,}23 \\ 20{,}29 \end{pmatrix}$ eine stationäre Verteilung, wobei 43,48 % der deutschen Münzen in D, 36,23 % in F und 20,29 % in S-Ländern sind.

d)Die Anzahl der Münzen in Deutschland errechnet sich entweder aus $0{,}88 \cdot 800 + 0{,}06 \cdot 600 + 0{,}15 \cdot 150 = 762{,}50\ [\text{Mio}]$ und analog folgt, dass 595,5 Mio
4 / 4 Münzen in Frankreich und 192 Mio. in den sonstigen Ländern am 1.1.2004 sind oder

mit Hilfe der Übergangsmatrix A zu $\begin{pmatrix} 762{,}5 \\ 595{,}5 \\ 192 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 150 \end{pmatrix}$.

e) I p(DD) = 0,7744 = 77,44 %

6 / 6 II p(FD;SD) = 0,0126 = 1,26 %

III Satz von Bayes;

p_D(F) = p(FD) / p(DD;FD;SD)

= 0,00457.. ≈ 0,46 %