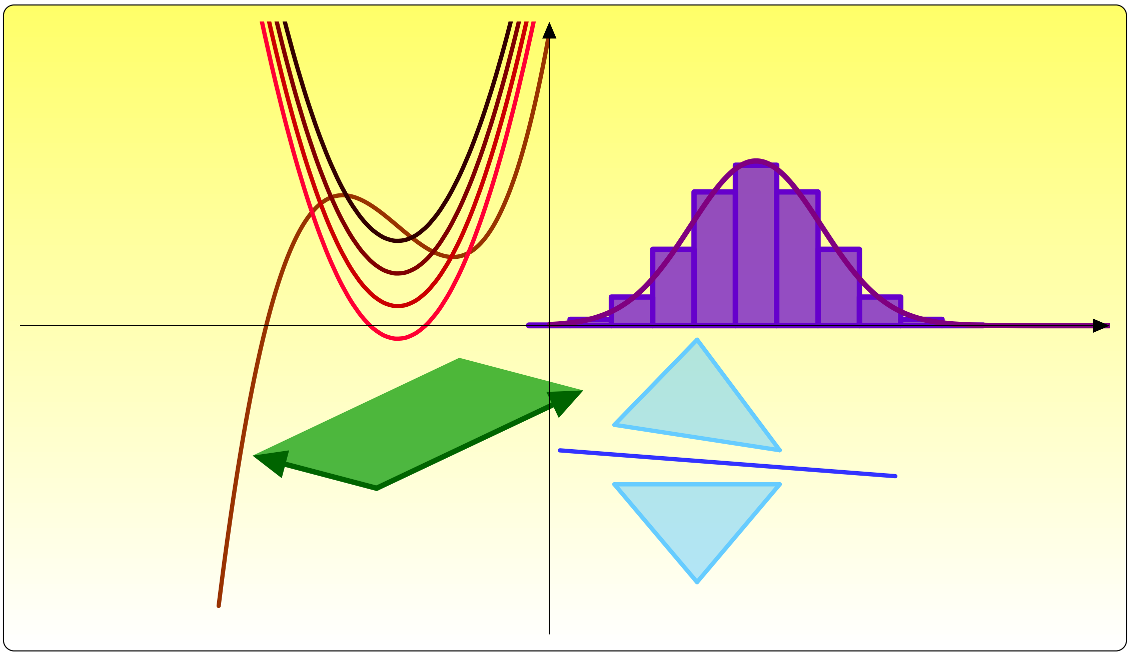
Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

QUA-LiS NRW

Zentralabitur Mathematik

Beispielaufgaben zum ersten Prüfungsteil

Aufgaben ohne Hilfsmittel



Inhaltsverzeichnis

1 Modellieren mithilfe von Funktionen

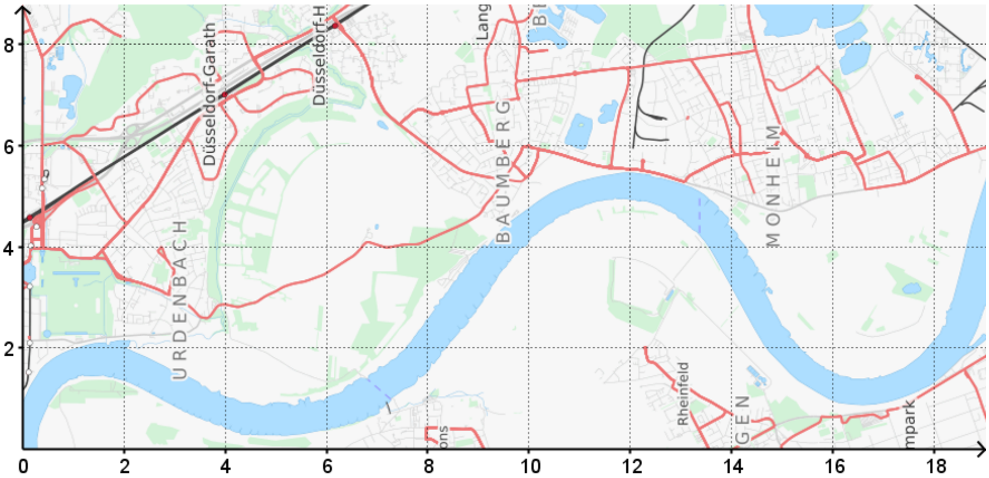


Abbildung 1: Rheinverlauf bei Düsseldorf

1. Der Kartenausschnitt zeigt ein Stück des Rheins bei Düsseldorf. Der Flussverlauf soll durch den Graph einer Funktion f angenähert werden. Dazu kann man sich auf Grundlage der Abbildung überlegen, welche Eigenschaften die gesuchte Funktion f haben soll. Diese Eigenschaften sollen in drei Gleichungen formuliert werden:

   $$f(\square) = \square \qquad f'(\square) = \square \qquad f''(\square) = \square$$

   Tragen Sie geeignete Zahlen in die sechs Kästchen ein und begründen Sie für jede der drei Gleichungen Ihre Eintragungen.

2. Wir nehmen an, dass der dargestellte Flussverlauf durch eine ganzrationale Funktion modelliert wird. Begründen Sie, welchen Grad diese Funktion mindestens haben sollte.

(3+3 Punkte)

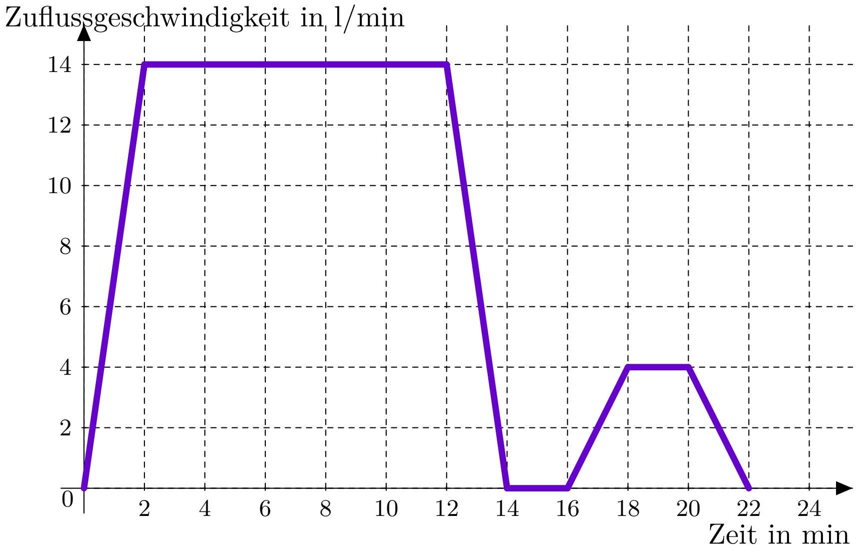
Erwartungshorizont

1. Bei dieser Aufgabe sollen Ansätze der Modellierungskompetenz geprüft werden. Es geht nicht darum, Werte möglichst exakt abzulesen. Der Prüfling soll grundlegende Eigenschaften erfassen. Mögliche Lösungen sind:
   $f(8) = 2$, da der Graph in etwa durch den Punkt $(8|2)$ verläuft. $f'(12) = 0$, da hier ein Extremum sein muss. $f''(8) = 0$, da hier der Graph in etwa einen Wendepnkt haben muss.

2. In der Abbildung sind 4 lokale Extrema erkennbar. Daher sollte es mindestens eine ganzrationale Funktion vom Grad 5 sein.

2 Interpretation des Integrals

Ein Planschbecken wird mit Wasser gefüllt. Das Diagramm zeigt die Zuflussgeschwindigkeit des Wassers in Liter pro Minute (l/min).



1. Begründen Sie anhand der Zeichnung, in welchen Zeiträumen (für $0 \leq t \leq 22$) die Wassermenge im Planschbecken zunimmt und wann die Wassermenge im Planschbecken unverändert bleibt.

2. Ermitteln Sie, wie viel Wasser nach 4 Minuten ins Becken geflossen ist und erklären Sie Ihr Vorgehen.

(3+3 Punkte)

Erwartungshorizont

1. Der Wasserstand bleibt von der 14. bis zur 16. Minute unverändert, da die Zuflussgeschwindigkeit hier 0 ist. Im Zeitraum von 0 bis 14 und von 16 bis 22 steigt der Wasserstand aufgrund einer positiven Zuflussgeschwindigkeit.

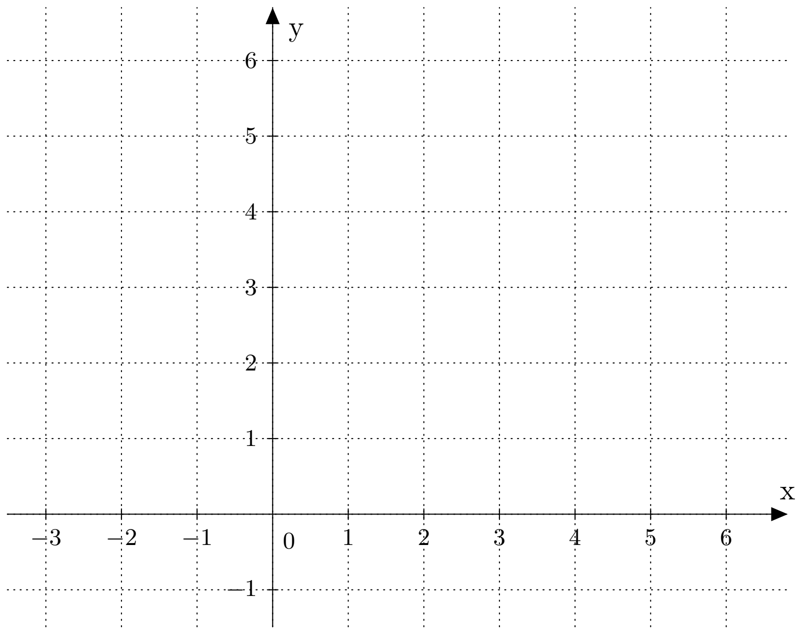
2. Der gesuchte Wert entspricht der Fläche zwischen dem Funktionsgraph und der x-Achse im Intervall von 0 bis 4. Diese lässt sich z.B. durch Zerlegung in Teilflächen berechnen: $0.5 \cdot 2 \cdot 14 + 2 \cdot 14 = 42$ $[l]$.

3 Funktionseigenschaften

1. Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3x \cdot e^{2x+1}$. Berechnen Sie die erste Ableitung von f und den Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = 0$.

2. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion g, wobei folgende Eigenschaften deutlich werden sollen:

$$g(0) = 4 \qquad g'(4) = 0 \qquad g''(4) > 0$$



(3+3 Punkte)

Erwartungshorizont

1. Mit Hilfe von Ketten- und Produktregel ergibt sich:

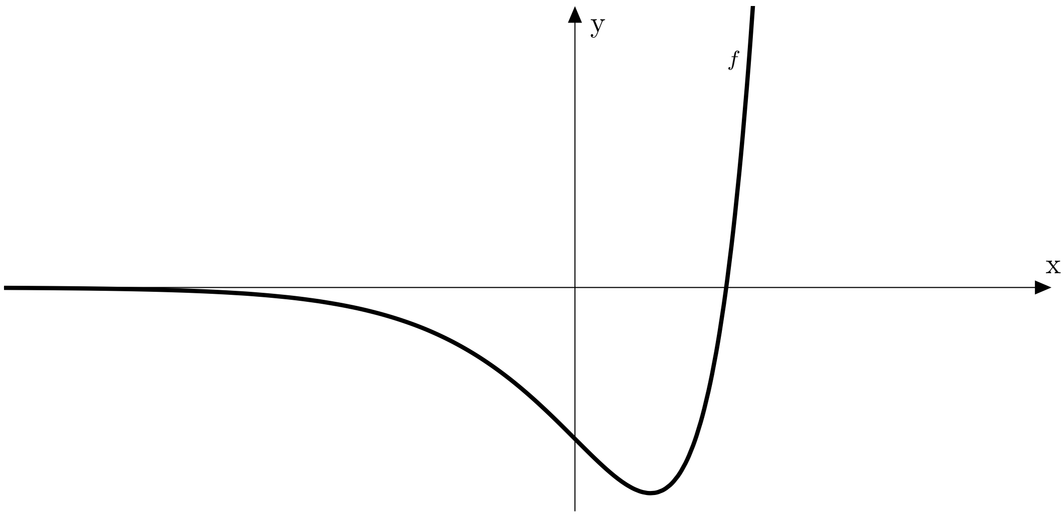
$$f'(x) = 3 \cdot e^{2x+1} + 3x \cdot 2 \cdot e^{2x+1} = (6x+3) \cdot e^{2x+1}; \quad f'(0) = 3e$$

2. Der skizzierte Funktionsgraph muss durch den Punkt $(0|4)$ verlaufen und an der Stelle $x = 4$ einen Tiefpunkt aufweisen.

4 Funktionen

1. Die Abbildung zeigt den Ausschnitt des Graphen einer Funktion f. Auf den Koordinatenachsen sind keine Einheiten angegeben. Begründen Sie (ohne Rechnung), dass keine der folgenden Funktionsvorschriften zu dem dargestellten Graphen gehören kann.

$$f_1(x) = (x-2) \cdot e^{-x} \qquad\qquad f_2(x) = (x+2) \cdot e^{x}$$



2. Berechnen Sie den Wert des Integrals.

$$\int_1^2 \left(2x^3 + 5\right)\, dx$$

(3+3 Punkte)

Erwartungshorizont

1. Der Graph von f_1 müsste wegen des Faktors e^{-x} für positive x-Werte gegen 0 streben. Der dargestellte Graph strebt jedoch für negative x-Werte gegen 0.
   Der dargestellte Graph weist eine positive Nullstelle auf, f_2 besitzt jedoch nur eine Nullstelle bei $x = -2$.

2.

$$\int_1^2 \left(2x^3 + 5\right)\, dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + 5x\right]_1^2 = 8 + 10 - \frac{1}{2} - 5 = 12\frac{1}{2}$$

5 Funktionenschar

Gegeben sind eine Schar von Funktionen f_k mit $f_k(x) = k \cdot x^2$ $(k > 0)$ und eine Funktion g mit $g(x) = x^3$. Die Funktionsgraphen von f_k und g schneiden sich an den Stellen 0 und k.

1. Die Funktionsgraphen von f_k und g schließen im ersten Quadranten eine Fläche mit dem Flächeninhalt $A(k)$ ein.
   Zeigen Sie: $A(k) = \frac{1}{12}k^4$.

2. Untersuchen Sie, ob der Flächeninhalt $A(k)$ extremal werden kann.

(3+3 Punkte)

Erwartungshorizont

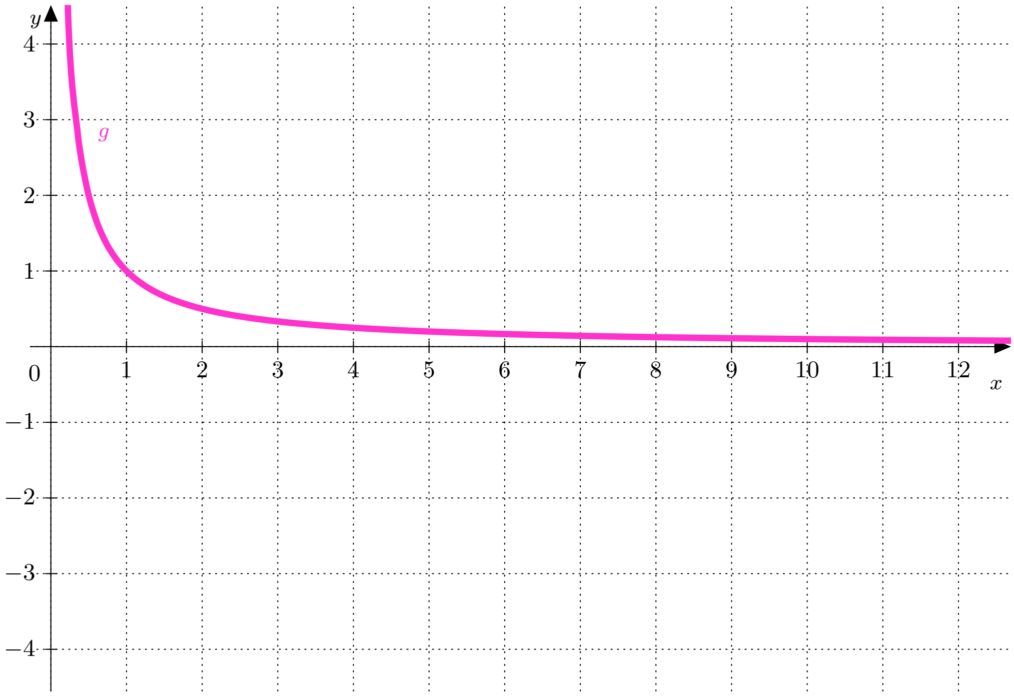
1. $$A(k) = \left| \int_0^k \left(kx^2 - x^3 \right) \, dx \right| = \left| \left[\frac{k}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^k \right| = \left| \frac{1}{3}k^4 - \frac{1}{4}k^4 \right| = \frac{1}{12}k^4$$

2. Die Funktion $k \to A(k)$, $k > 0$ ist streng monoton steigend. Daher kann der Flächeninhalt $A(k)$ nicht extremal werden.

6 Logarithmus (LK)

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \ln(x + e)$. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(0|f(0))$.

2. In der Abbildung ist der Graph der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ dargestellt. Geben Sie die Funktionsgleichung der Stammfunktion G von g an, deren Graph durch den Punkt $Q(1|-1)$ verläuft und skizzieren Sie den Graphen von G.

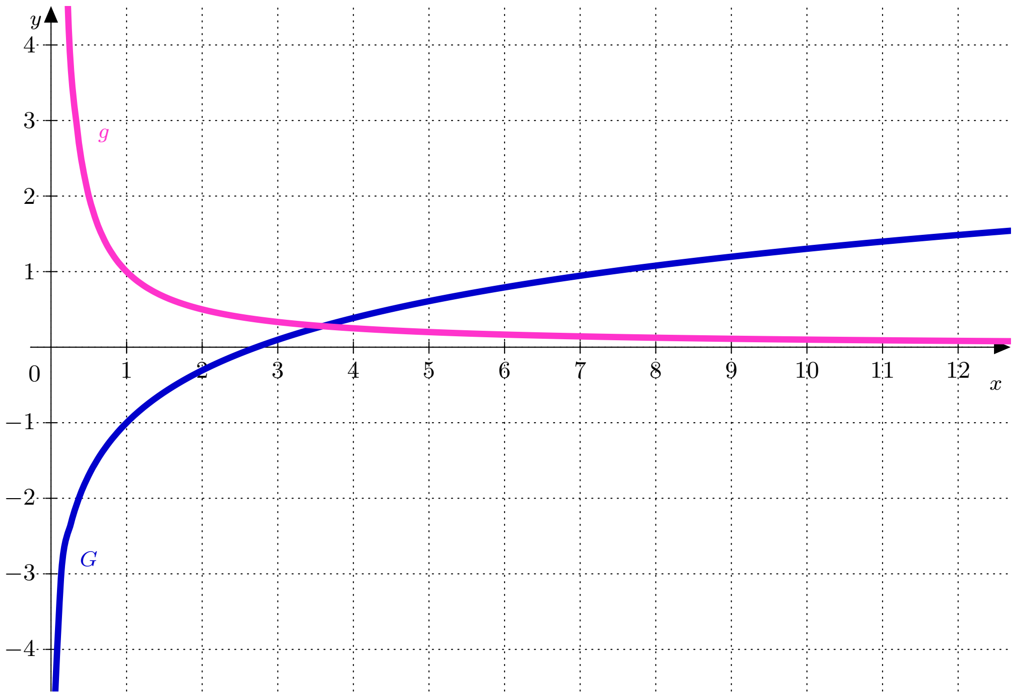


(3+3 Punkte)

Erwartungshorizont

1. $f'(x) = \frac{1}{x+e}$, $\qquad f(0) = 1$, $\qquad f'(0) = \frac{1}{e}$.
   Die Tangentengleichung lautet $y = \frac{1}{e} \cdot x + 1$.

2. Die Funktion G mit $G(x) = \ln(x) - 1$ ist die gesuchte Stammfunktion. Es gilt $G'(x) = g(x)$ und $G(1) = -1$.

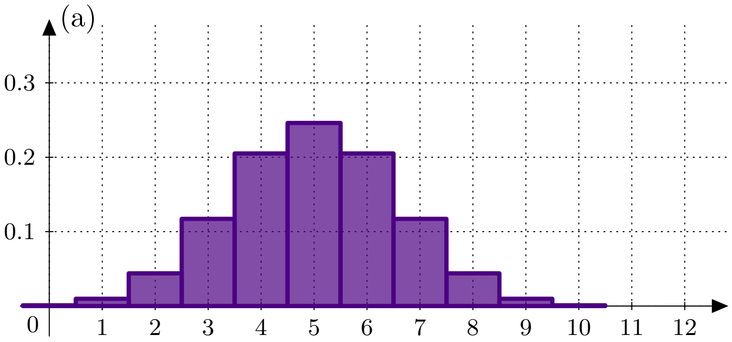

y
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
x
g
G

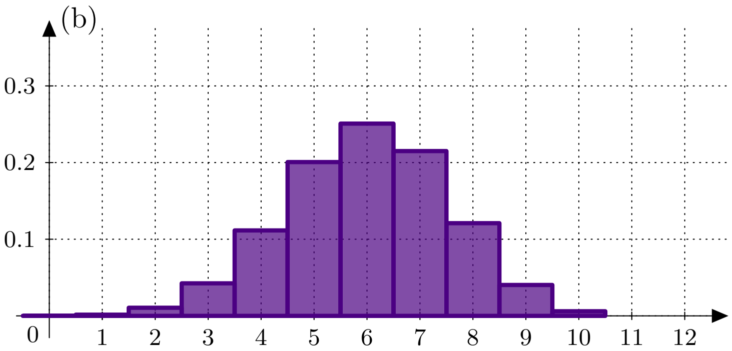
7 Binomialverteilung

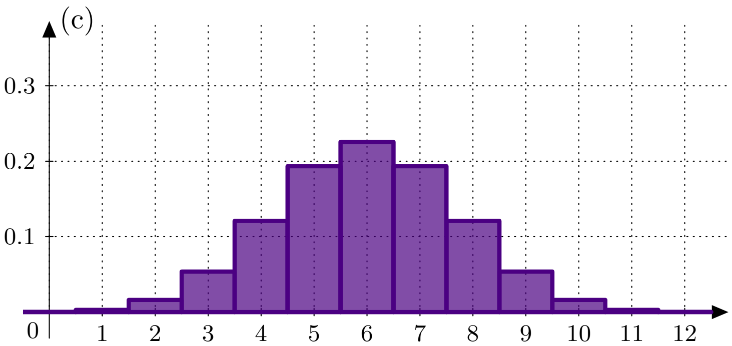
1. In einer Urne liegen 2 rote, 2 grüne und eine goldene Kugel. Beschreiben Sie ein Zufallsexperiment und ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem folgenden Term berechnen lässt:

$$\binom{5}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4$$

2. Welches der folgenden Diagramme gehört zu einer Binomialverteilung mit $n = 10$ Versuchen und einer Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 0.6$? Begründen Sie kurz Ihre Wahl.







(3+3 Punkte)

Erwartungshorizont

1. Zieht man fünf Mal aus der Urne eine Kugel und legt diese nach jedem Zug wieder zurück, so beschreibt der Term die Wahrscheinlichkeit, dass genau viermal die goldene Kugel gezogen wird und einmal eine rote oder grüne Kugel.

2. Abbildung (b) beschreibt die gesuchte Binomialverteilung. In (a) liegt der Erwartungswert nicht bei 6, in (c) handelt es sich um eine Verteilung mit $n > 10$.

8 Binomialverteilung

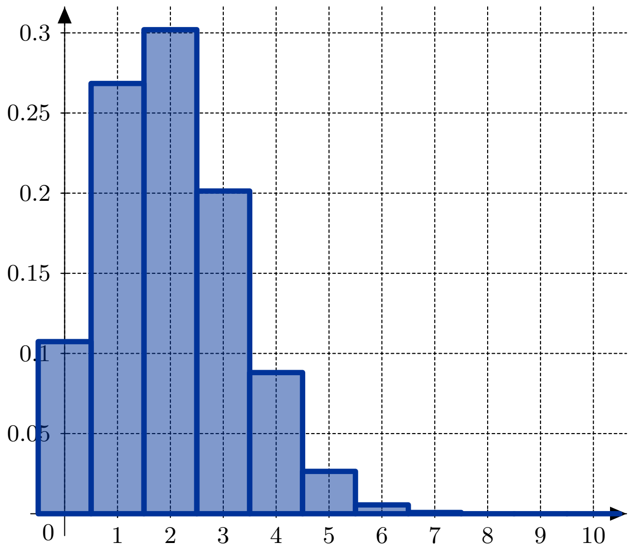
1. Ein Schnellrestaurant veranstaltet ein Gewinnspiel und schenkt jedem Kunden ein Los. Die Wahrscheinlichkeit für einen Sofortgewinn liegt bei $\frac{1}{5}$. Ordnen Sie den folgenden Ereignissen den richtigen Term zur näherungsweisen Berechnung der Wahrscheinlichkeit zu.
   a) Unter 10 Losen sind keine Sofortgewinne.
   b) Unter 10 Losen sind genau 4 Sofortgewinne.
   c) Unter 10 Losen ist mindestens ein Sofortgewinn.

$$P_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \qquad P_2 = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6$$

$$P_3 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \qquad P_4 = \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

$$P_5 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \qquad P_6 = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

2. Die Abbildung zeigt die Binomialverteilung für $n = 10$ und $p = \frac{1}{5}$. Bestimmen Sie den Wert für $P(X \leq 2)$.



(3+3 Punkte)

Erwartungshorizont

1. Richtig sind:

$$a) P_4 = \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \qquad b) P_2 = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 \qquad c) P_5 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

2. Man kann der Abbildung entnehmen, dass $P(X = 0) \approx 0,11$, $P(X = 1) \approx 0,27$ und $P(X = 2) \approx 0,3$. Insgesamt ergibt sich $P(X \leq 2) \approx 0,68$.

9 Urnenmodelle

In einer Urne befinden sich 6 rote und 2 gelbe Kugeln.

1. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, eine rote bzw. gelbe Kugel zu ziehen.
2. Aus der Urne werden 4 Kugeln „mit Zurücklegen“ gezogen.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man genau 3 rote Kugeln zieht.
3. In die Urne werden zusätzlich n schwarze Kugeln gelegt.
   Bestimmen Sie n so, dass die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{5}{9}$ ist.

(2+2+2 Punkte)

Erwartungshorizont

1. Man erhält $P(rot) = \frac{3}{4}$ und $P(gelb) = \frac{1}{4}$.
2. Man kann das Ziehen der 4 Kugeln als Bernoulli-Kette mit Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ für „rot “auffassen. Dann gilt:

$$P\left(dreimal\ „rot“\right) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \frac{3^3}{4^4} = \frac{27}{64}$$

3. Es ist $P(„schwarz“) = \frac{n}{8+n}$.

$$\frac{n}{8+n} = \frac{5}{9} \quad \Leftrightarrow \quad 9n = 5 \cdot (8+n) \quad \Leftrightarrow \quad 4n = 40 \quad \Leftrightarrow \quad n = 10$$

10 Standardabweichung und Varianz

1. Eine Zufallsgröße X sei binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = \frac{1}{5}$. Berechnen Sie die Standardabweichung $\sigma(X)$.

2. Die Zufallsgröße Y sei binomialverteilt mit dem Parameter $n = 100$. Y habe die Varianz $Var(Y) = 9$.
   Berechnen Sie die möglichen Trefferwahrscheinlichkeiten p und Erwartungswerte μ.

(2+4 Punkte)

Erwartungshorizont

1. $\sigma(X) = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \sqrt{16} = 4$

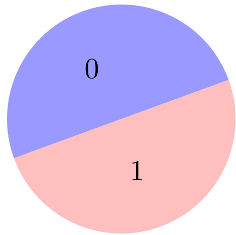
2. Wegen $Var(Y) = n \cdot p \cdot (1 - p)$ erhält man folgende quadratische Gleichung:

$$9 = 100 \cdot p \cdot (1 - p) \;\Leftrightarrow\; p^2 - p + \frac{9}{100} = 0.$$

   Man erhält die Lösungen $p_1 = \frac{9}{10}$ und $p_2 = \frac{1}{10}$. Die zugehörigen Erwartungswerte sind $\mu_1 = 90$ und $\mu_2 = 10$.

11 Stochastischer Prozess

Bei einem Spiel wird das abgebildete Glücksrad mehrfach gedreht und die Punktzahl jeweils addiert. Das Spiel ist beendet, wenn der Spieler 2 Punkte erreicht.



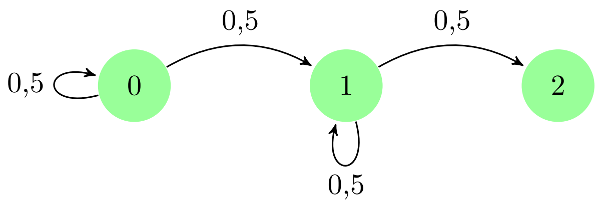
1. Zeichnen Sie einen Übergangsgraph zu diesem Spiel. Erklären Sie, warum das Spiel theoretisch unendlich lange dauern kann.

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spiel nach höchstens drei mal drehen endet.

(3+3 Punkte)

Erwartungshorizont

1. Theoretisch wäre es möglich, dass der Spieler unendlich oft die „0“ dreht und damit seinen Punktestand nicht verändert. Im Übergangsgraph ist dies an den Pfeilen zum selben Zustand erkennbar.



2. Dreht der Spieler „0 - 1 - 1“ oder „1 - 0 - 1“ beträgt die zugehörige Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Endet das Spiel schon nach zwei Drehungen (der Spieler dreht „1 - 1“), liegt die Wahrscheinlichkeit hierfür bei $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Berücksichtigt man diese drei Ereignisse, beträgt die Wahrscheinlichkeit für ein Spielende nach höchstens drei Drehungen $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.
   Alternativ kann die Aufgabe auch mit einer Matrix gelöst werden:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}; \qquad P^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 \\ 0,375 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

12 Stochastische Matrix

1. Gegeben sei die stochastische Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ mit $0 \leq a, b \leq 1$ sowie ein Zustandsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
   Begründen Sie, dass bei den Vektoren $\vec{x}$ und $S \cdot \vec{x}$ die Summe der Komponenten gleich ist.

2. Gegeben ist die stochastische Matrix $M = \begin{pmatrix} a & 0,5 \\ 1-a & 0,5 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq a \leq 1$.

   Untersuchen Sie, ob es eine reelle Zahl a gibt, sodass $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

(3+3 Punkte)

Erwartungshorizont

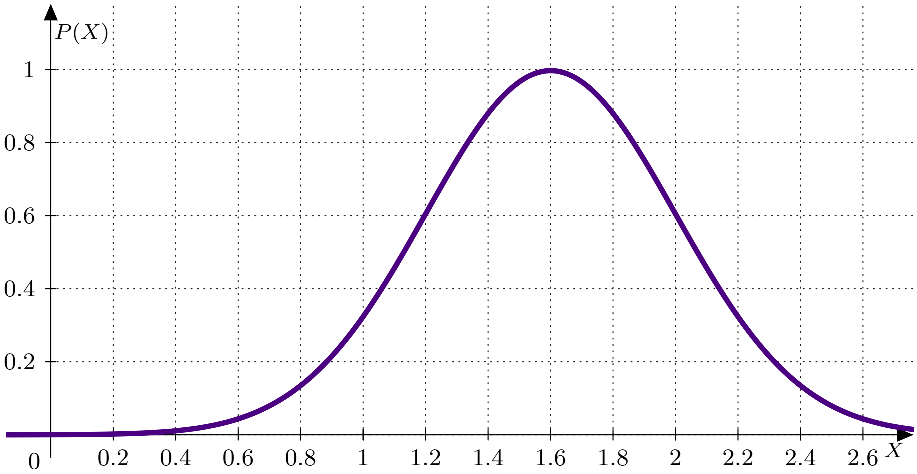
1. $$S \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ (1-a)x_1 + (1-b)x_2 \end{pmatrix}$$

   Die Summe der Komponenten von $S \cdot \vec{x}$ ist damit
   $(a + (1-a))\, x_1 + (b + (1-b))\, x_2 = x_1 + x_2$.

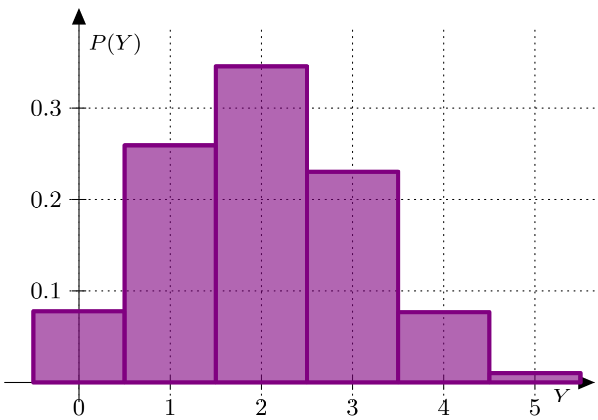
2. Die Annahme $\begin{pmatrix} a & 0,5 \\ 1-a & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0,5 \\ 1-a & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ impliziert $0,5a + 0,25 = 0$.
   Hieraus folgt $a = -\frac{1}{2}$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $0 \leq a \leq 1$ steht. Demnach gibt es kein a mit der geforderten Eigenschaft.

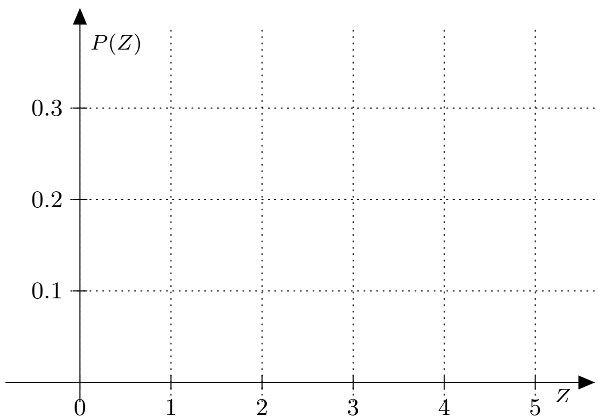
13 Normalverteilung und Binomialverteilung (LK)

1. Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X.
   Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq X \leq 1{,}4)$ und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



2. Die Zufallsgrößen Y und Z seien binomialverteilt mit $p_Y = 0{,}4$ und $p_Z = 0{,}6$. Die Anzahl der Versuche sei $n = 5$. Die linke Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y. Stellen Sie in der rechten Abbildung die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z dar.



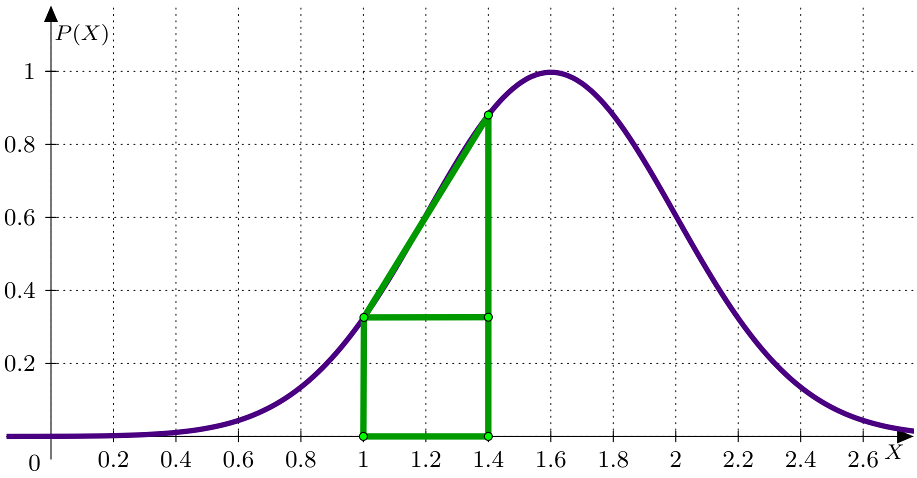


(4+2 Punkte)

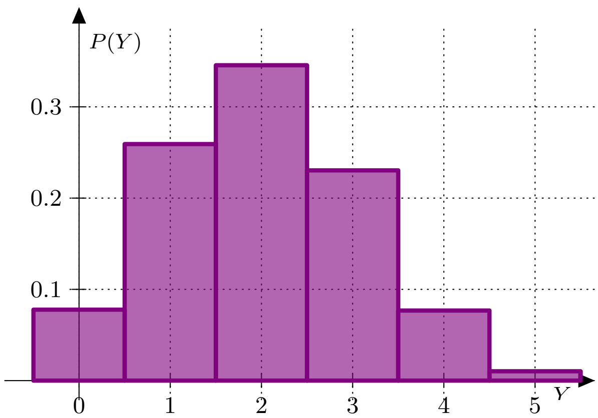
Erwartungshorizont

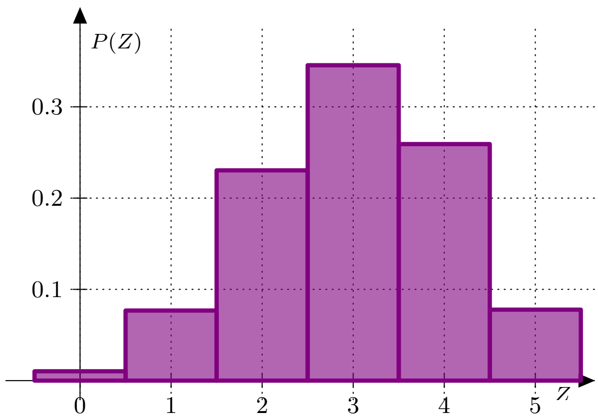
1. Die Fläche unter dem Graphen im Intervall $[1; 1{,}4]$ entspricht der gesuchten Wahrscheinlichkeit. Sie kann durch ein Trapez bzw. durch ein Rechteck und ein Dreieck abgeschätzt werden. Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt näherungsweise

$0{,}4LE \cdot 0{,}3LE = 0{,}12FE$, der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt näherungsweise $0{,}5 \cdot 0{,}4LE \cdot 0{,}6LE = 0{,}12FE$.
Die Maßzahl der Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq X \leq 1{,}4) = 0{,}24$.



2.





14 Eigenschaften von Vektoren

1. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ z \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ sollen orthogonal zueinander stehen. Erläutern Sie, welche Bedingung sich daraus für $x, z \in \mathbb{R}$ ergibt. Bestimmen Sie auch ein konkretes Zahlenbeispiel für x und z.

2. Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf. Erläutern Sie, um welches besondere Parallelogramm es sich handelt.

(3+3 Punkte)

Erwartungshorizont

1. Die beiden Vektoren sind orthogonal zueinander, wenn das Skalarprodukt 0 ergibt: $1 \cdot x + z \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5z$. Ein Zahlenbeispiel ist $x = -5$ und $z = 1$.

2. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren beträgt -14. Die beiden Vektoren sind nicht orthogonal zueinander, also ist das Parallelogramm kein Rechteck. Die Überprüfung der Vektorenlängen ergibt $|\vec{a}| = \sqrt{26} = \left|\vec{b}\right|$. Also ist es eine Raute.

15 Gleichungssysteme

1. Ein lineares Gleichungssystem besteht aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten a und b. Dieses Gleichungssystem wurde mit dem Taschenrechner gelöst. Als Lösungsmenge zeigt der Taschenrechner $a = a$, $b = 2a$ an. Interpretieren Sie diese Lösung.

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} 2x + y \phantom{{}+z} &= 1 \\ -2x - 2y + z &= 2 \\ x + 2y - z &= -3 \end{aligned}$$

(3+3 Punkte)

Erwartungshorizont

1. Die Lösung $a = a$, $b = 2a$ bedeutet eine Abhängigkeit der beiden Variablen voneinander. Es gibt demnach unendliche viele Zahlenpaare, die das Gleichungssystem lösen, z.B. (0|0), (1|2), (2|4).

2. $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

16 Lagebeziehung Gerade – Ebene (LK)

Die Gerade g und die Ebene E werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad E:\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$$

Bestimmen Sie den Normalenvektor der Ebene E. Begründen Sie, wie E und g zueinander liegen und geben Sie ggf. gemeinsame Punkte an.

(6 Punkte)

Erwartungshorizont

Der Normalenvektor von E ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, ein Vielfaches des Richtungsvektors von g.
Daher verläuft g senkrecht zu E.
Desweiteren gilt $2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 1$. Also durchstößt die Gerade g die Ebene im Punkt $P(1|2|-3)$.

17 Lagebeziehung von Geraden

1. Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}; \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

   Projiziert man g und h senkrecht in die $x - y-$Koordinatenebene, so erhält man die Geraden g' und h'. Geben Sie die Gleichungen der Geraden g' und h' in Parameterform an.

2. Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g' und h', und bestimmen Sie dann ohne Rechnung die Lagebeziehung der Geraden g und h.

(2 + 4 Punkte)

Erwartungshorizont

1. Es gilt

$$g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}; \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

2. Die Richtungsvektoren von g' und h' sind Vielfache voneinander sind. Daher sind die beiden Geraden parallel oder identisch. Der Punkt $P(3|3)$ liegt genau dann auf der Geraden g', wenn es ein $r \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gibt. Diese Aussage führt auf den Widerspruch $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Also sind die Geraden g' und h' echt parallel.
   Daher besitzen auch die Geraden g und h keinen Schnittpunkt. Die angegeben Richtungsvektoren von g und h sind keine Vielfachen voneinander und damit nicht parallel. Also müssen beide Geraden windschief sein.