Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan Beispielaufgabe

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Die Lebensdauer von Glühlampen variiert stark. Wir gehen im Folgenden von einer gleichmäßigen Nutzung der Glühlampen mit 1000 Stunden im Jahr aus. Bei dieser Nutzung gilt, dass 40 % der Glühlampen bereits im ersten Jahr durchbrennen. Innerhalb des zweiten Jahres werden 25 % der Glühlampen defekt. Innerhalb des dritten Jahres werden 30 % der Glühlampen defekt. Länger als vier Jahre leuchtet keine der Glühlampen.

a) (1) *Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einem geeigneten Diagramm dar.*

(2) *Berechnen Sie die durchschnittlich zu erwartende Lebensdauer der Glühlampen.*

(4 + 5 Punkte)

b) Seit September 2012 werden in Deutschland keine Glühlampen mehr verkauft. Stattdessen werden Energiesparlampen angeboten, die u. a. eine längere Lebenszeit haben. Vereinfachend gehen wir von sechs Altersstufen[1] der Energiesparlampen aus, deren Anzahlen

$J1$ Anzahl der Lampen im ersten Jahr ihrer Betriebszeit

$J2$ Anzahl der Lampen im zweiten Jahr ihrer Betriebszeit

...

$J6$ Anzahl der Lampen im sechsten Jahr ihrer Betriebszeit

am Ende jedes Kalenderjahres durch Zählung ermittelt und jeweils zu einer Altersverteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} J1 \\ J2 \\ J3 \\ J4 \\ J5 \\ J6 \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden. Wir gehen in diesem Modell davon aus, dass jede defekte Energiesparlampe sogleich durch eine neue ersetzt wird. Die Matrix P beschreibt die Entwicklung der Altersverteilung der Energiesparlampen von Jahr zu Jahr:

---

[1] Auch hier gehen wir von einer gleichmäßigen Betriebszeit der Lampen mit 1000 Stunden im Jahr aus.

$$P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) *Interpretieren Sie die 5. und 6. Spalte der Matrix P im Sachkontext.*

Bei Renovierungsarbeiten werden in einem Bürogebäude alle alten Lampen durch 1000 neue Energiesparlampen ersetzt.

(2) *Bestimmen Sie die Altersverteilung der Energiesparlampen im Bürogebäude nach zwei Jahren und nach zehn Jahren.*

(3) *Berechnen Sie, wie viele Energiesparlampen innerhalb der ersten drei Jahre als Ersatz für defekte Energiesparlampen im Bürogebäude angeschafft werden müssen.*

(4) *Ermitteln Sie die langfristige Altersverteilung der Energiesparlampen im Bürogebäude. Erklären Sie für eine langfristige Perspektive, wie viele Lampen pro Jahr zu erneuern sind.*

(4 + 4 + 6 + 5 Punkte)

c) (1) 1 % der Energiesparlampen des Herstellers LUX sind fehlerhaft und leuchten nicht. Dieser Anteil gilt als unabhängige Wahrscheinlichkeit für jede Lampe.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 250 Energiesparlampen höchstens 5 Lampen fehlerhaft sind.

Der Hersteller LUX führt eine Werbemaßnahme durch und legt mit (unbekannter) Wahrscheinlichkeit p zu jeweils einer Lampe einen Gutschein.

(2) *Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich bei genau 3 von 5 Lampen jeweils ein Gutschein befindet, kann durch eine Funktion mit dem Funktionsterm* $f(p)=10\cdot\left(p^5-2p^4+p^3\right)$ *mit* $0\le p\le 1$ *beschrieben werden.*

(3) *Bestimmen Sie die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion* f *und interpretieren Sie jede dieser Nullstellen im Sachzusammenhang.*

(2 + 4 + 6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan Beispielaufgabe

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Schwerpunkt stochastische Matrizen

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung
   - Stochastische Prozesse

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

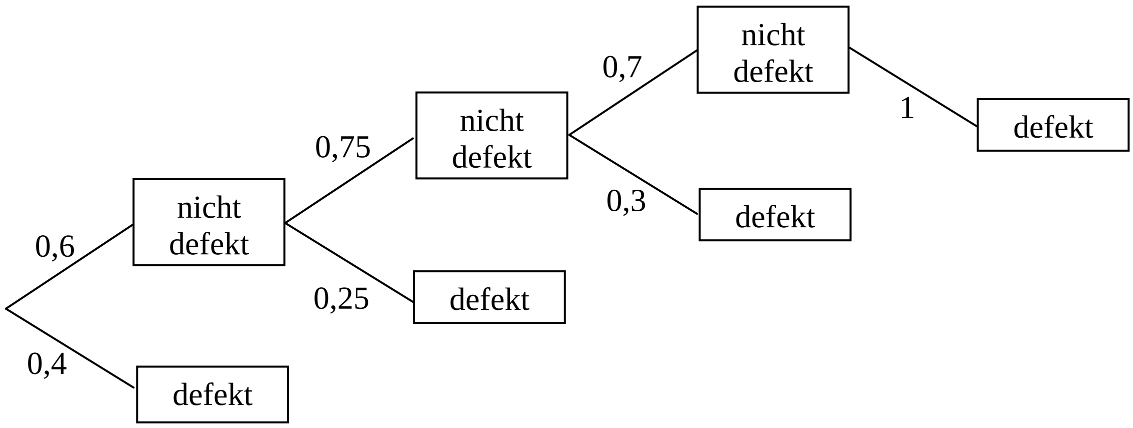
[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

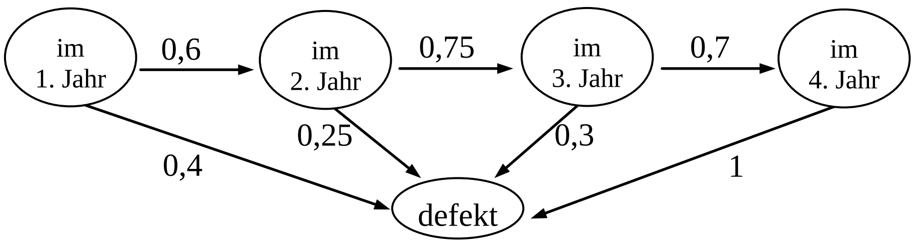
Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Die Aufgabe kann u. a. in Form eines Baumdiagramms oder eines Übergangsdiagramms gelöst werden.
Im Baumdiagramm entspricht jeweils eine Stufe einem Jahr, sodass die Anteile an defekten und nicht defekten Glühlampen eines Jahres an den Pfaden stehen.



Der Übergangsgraph stellt die anteiligen Übergänge von einem ins nächste Jahr dar sowie zu dem absorbierenden Zustand „defekt“.



(2) Der Erwartungswert ergibt sich als Produkt aus Jahren und den dazugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten. $0\cdot 0{,}4+1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}75\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}75\cdot 0{,}7\approx 1{,}365$.

Ebenfalls akzeptiert wird folgende Rechnung, die davon ausgeht, dass der Defekt am Ende eines Jahrs eintritt:

$1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 \approx 2{,}365$.

[Die tatsächlich durchschnittlich zu erwartende Lebensdauer liegt zwischen beiden Werten.]

Teilaufgabe b)

(1) 40 % der Energiesparlampen werden im fünften Jahr ihrer Betriebszeit defekt und durch neue ersetzt. 60 % der Energiesparlampen, die sich im fünften Jahr ihrer Betriebszeit befinden, werden in dem Jahr nicht defekt. Die 6. Spalte zeigt, dass Energiesparlampen in diesem Modell höchstens sechs Jahre leuchten.

(2) $$P^2 \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 210 \\ 630 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^{10} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 283 \\ 166 \\ 147 \\ 161 \\ 170 \\ 72 \end{pmatrix}$$

(3) Die Altersverteilungen der ersten drei Jahre sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 160 \\ 210 \\ 630 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 132 \\ 112 \\ 189 \\ 567 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Addition der Einträge $J1$ wird die Anzahl der neu einzusetzenden Lampen insgesamt berechnet: $300 + 160 + 132 = 592$. Insgesamt müssen 592 Energiesparlampen innerhalb der ersten drei Jahre erneuert werden.

(4) Diese Teilaufgabe kann z. B. numerisch mit Hilfe des GTR gelöst werden. Durch den Vergleich von hohen Potenzen der Matrix P erkennt man die stabile Grenzmatrix

$$P^{49} \approx P^{50} \approx \begin{pmatrix} 0{,}283 & 0{,}283 & 0{,}283 & 0{,}283 & 0{,}283 & 0{,}283 \\ 0{,}198 & 0{,}198 & 0{,}198 & 0{,}198 & 0{,}198 & 0{,}198 \\ 0{,}178 & 0{,}178 & 0{,}178 & 0{,}178 & 0{,}178 & 0{,}178 \\ 0{,}161 & 0{,}161 & 0{,}161 & 0{,}161 & 0{,}161 & 0{,}161 \\ 0{,}112 & 0{,}112 & 0{,}112 & 0{,}112 & 0{,}112 & 0{,}112 \\ 0{,}067 & 0{,}067 & 0{,}067 & 0{,}067 & 0{,}067 & 0{,}067 \end{pmatrix}.$$

Als langfristige Altersverteilung ergibt sich ungefähr $\begin{pmatrix} 283 \\ 198 \\ 178 \\ 160 \\ 112 \\ 67 \end{pmatrix}$. Daher sind in dem Gebäude (auf lange Sicht) ungefähr 283 Lampen jährlich zu erneuern.

Teilaufgabe c)

(1) Die Zufallsgröße *X: Anzahl der fehlerhaften Lampen* kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 250$ und $p = 0{,}01$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $P(X \le 5) \approx 0{,}959$. (Der Wert kann z. B. durch die kumulierte Binomialverteilungsfunktion des GTR *BinomialCD* und Eingabe der Parameter ermittelt werden.)

(2) $f(p) = P_p(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 = 10 \cdot p^3 \cdot (1 - 2p + p^2) = 10 \cdot (p^5 - 2p^4 + p^3).$

(3) $f'(p) = 10 \cdot (5p^4 - 8p^3 + 3p^2)$. $f'(p) = 0$ liefert die Nullstellen $p = 0;\ p = \frac{3}{5};\ p = 1$.

Für $p = 0$ (bei keiner Lampe liegt ein Gutschein) und $p = 1$ (bei jeder Lampe liegt ein Gutschein) ist das Ereignis „bei genau 3 von 5 Lampen liegt ein Gutschein“ ein unmögliches Ereignis. Deshalb hat die Wahrscheinlichkeit für diese beiden Werte von p ein Minimum: $f(0) = 0 = f(1)$.

An der Stelle $p = \frac{3}{5}$ liegt ein Vorzeichenwechsel in $f'(p)$ von $+$ nach $-$ vor. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei genau 3 von 5 Lampen ein Gutschein liegt, ist für $p = \frac{3}{5}$ maximal.

(Es gilt $f\left(\frac{3}{5}\right)=34{,}56\,\%$. Für $n=5$ und $p=\frac{3}{5}$ ist 3 der Erwartungswert.)

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt den beschriebenen Sachverhalt in einem geeigneten Diagramm dar.	4			
2	(2) berechnet die durchschnittlich zu erwartende Lebensdauer der Glühlampen.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) interpretiert die 5. und 6. Spalte der Matrix P im Sachkontext.	4			
2	(2) bestimmt die Altersverteilung der Energiesparlampen nach 2 und nach 10 Jahren.	4			
3	(3) berechnet, wie viele Energiesparlampen innerhalb der ersten 3 Jahre als Ersatz angeschafft werden müssen.	6			
4	(4) ermittelt die langfristige Altersverteilung der Energiesparlampen im Bürogebäude.	3			
5	(4) erklärt für eine langfristige Perspektive, wie viele Lampen pro Jahr zu erneuern sind.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (19) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**19**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 250 Energiesparlampen höchstens 5 Lampen fehlerhaft sind.	2			
2	(2) zeigt, dass die dargestellte Wahrscheinlichkeit mit der Funktion $f(p) = 10 \cdot (p^5 - 2p^4 + p^3)$ beschrieben werden kann.	4			
3	(3) bestimmt die Nullstellen der ersten Ableitung.	3			
4	(3) interpretiert die Nullstellen im Sachzusammenhang.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

	Summe insgesamt	**40**			

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan
Beispielaufgabe

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Die Lebensdauer von Glühlampen variiert stark. Wir gehen im Folgenden von einer gleichmäßigen Nutzung der Glühlampen mit 1000 Stunden im Jahr aus. Bei dieser Nutzung gilt, dass 40 % der Glühlampen bereits im ersten Jahr durchbrennen. Innerhalb des zweiten Jahres werden 25 % der Glühlampen defekt. Innerhalb des dritten Jahres werden 30 % der Glühlampen defekt. Länger als vier Jahre leuchtet keine der Glühlampen.

a) (1) *Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einem geeigneten Diagramm dar.*

(2) *Berechnen Sie die durchschnittlich zu erwartende Lebensdauer der Glühlampen.*

(4 + 5 Punkte)

b) Seit September 2012 werden in Deutschland keine Glühlampen mehr verkauft. Stattdessen werden Energiesparlampen angeboten, die u. a. eine längere Lebenszeit haben. Vereinfachend gehen wir von sechs Altersstufen[1] der Energiesparlampen aus, deren Anzahlen

$J1$ Anzahl der Lampen im ersten Jahr ihrer Betriebszeit

$J2$ Anzahl der Lampen im zweiten Jahr ihrer Betriebszeit

...

$J6$ Anzahl der Lampen im sechsten Jahr ihrer Betriebszeit

am Ende jedes Kalenderjahres durch Zählung ermittelt und jeweils zu einer Altersverteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} J1 \\ J2 \\ J3 \\ J4 \\ J5 \\ J6 \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden. Wir gehen in diesem Modell davon aus, dass jede defekte Energiesparlampe sogleich durch eine neue ersetzt wird. Die Matrix P be-

[1] Auch hier gehen wir von einer gleichmäßigen Betriebszeit der Lampen mit 1000 Stunden im Jahr aus.

schreibt die Entwicklung der Altersverteilung der Energiesparlampen von Jahr zu Jahr:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) *Interpretieren Sie die 5. und 6. Spalte der Matrix P im Sachkontext.*

(2) Bei Renovierungsarbeiten werden in einem Bürogebäude alle alten Lampen durch 1000 neue Energiesparlampen ersetzt.

Bestimmen Sie die Altersverteilung der Energiesparlampen im Bürogebäude nach zwei Jahren.

(3) *Beurteilen Sie, ob eine reelle Zahl* r *mit* $0 < r < 1$ *existiert, sodass die Gleichung* $P \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v}$ *gilt.*

(4 + 2 + 5 Punkte)

c) In einem Schulgebäude gibt es 200 neue Energiesparlampen. Da diese sehr häufig aus- und eingeschaltet werden, ist die Lebenszeit deutlich kürzer als bei einer gleichmäßigen Nutzung der Energiesparlampen. Insbesondere der Anteil a der Energiesparlampen, die im ersten Jahr defekt werden, wird durch diese Nutzung beeinflusst. Der veränderte Lebenszeitprozess lässt sich durch die Matrix Q beschreiben:

$$Q = \begin{pmatrix} a & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 & 1 \\ 1-a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Der Hausmeister der Schule musste innerhalb von zwei Jahren 200 neue Energiesparlampen einbauen.

Ermitteln Sie den Anteil a auf 2 Nachkommastellen genau.

(2) Der Hausmeister behauptet: „Jetzt habe ich innerhalb von zwei Jahren jede Lampe im Gebäude ausgewechselt.“

Prüfen Sie diese Behauptung.

(6 + 2 Punkte)

d) (1) 1 % der Energiesparlampen des Herstellers LUX sind fehlerhaft und leuchten nicht. Dieser Anteil gilt als unabhängige Wahrscheinlichkeit für jede Lampe.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 250 Energiesparlampen höchstens 5 Lampen fehlerhaft sind.

Der Hersteller LUX führt eine Werbemaßnahme durch und legt mit (unbekannter) Wahrscheinlichkeit p zu jeweils einer Lampe einen Gutschein.

(2) *Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich bei genau 3 von 5 Lampen jeweils ein Gutschein befindet, kann durch eine Funktion mit dem Funktionsterm* $f(p) = 10 \cdot (p^5 - 2p^4 + p^3)$ mit $0 \leq p \leq 1$ *beschrieben werden.*

(3) *Bestimmen Sie die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion* f *und interpretieren Sie jede dieser Nullstellen im Sachzusammenhang.*

(2 + 4 + 6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan Beispielaufgabe

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Schwerpunkt stochastische Matrizen

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung
   - Stochastische Prozesse

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

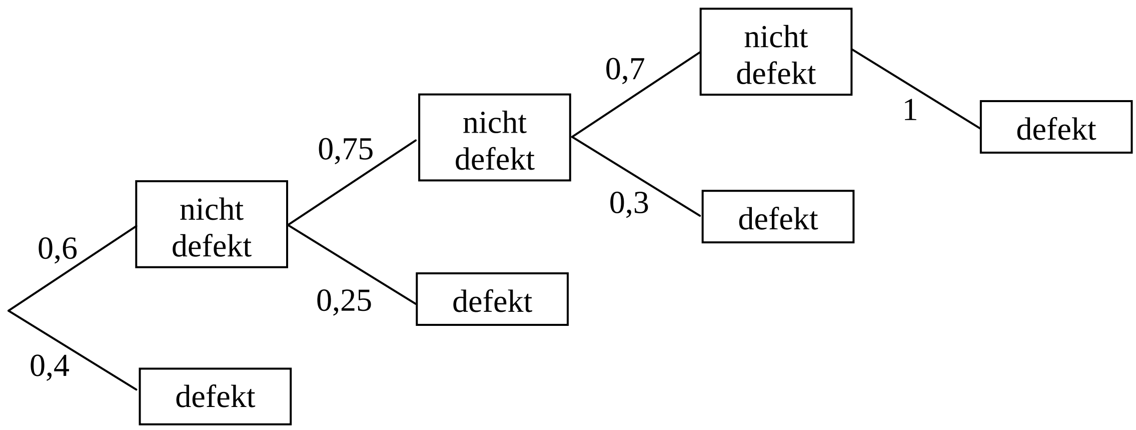
6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

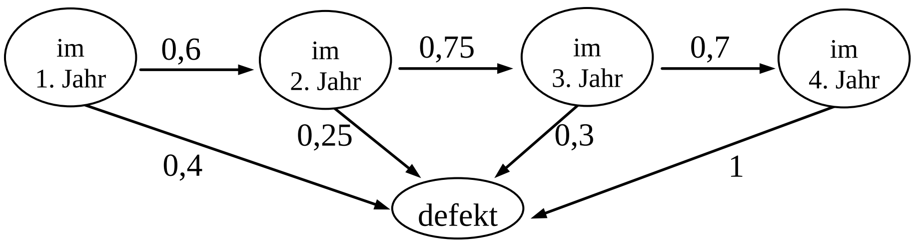
Teilaufgabe a)

(1) Die Aufgabe kann u.a. in Form eines Baumdiagramms oder eines Übergangsdiagramms gelöst werden.

Im Baumdiagramm entspricht jeweils eine Stufe einem Jahr, sodass die Anteile an defekten und nicht defekten Glühlampen eines Jahres an den Pfaden stehen.



Der Übergangsgraph stellt die anteiligen Übergänge von einem ins nächste Jahr dar sowie zu dem absorbierenden Zustand „defekt“.



(2) Der Erwartungswert ergibt sich als Produkt aus Jahren und den dazugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten. $0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 \approx 1{,}365$.

Ebenfalls akzeptiert wird folgende Rechnung, die davon ausgeht, dass der Defekt am Ende eines Jahres eintritt:

$1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}25+3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}75\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}75\cdot 0{,}7\approx 2{,}365$.

[Die tatsächlich durchschnittlich zu erwartende Lebensdauer liegt zwischen beiden Werten.]

Teilaufgabe b)

(1) 40 % der Energiesparlampen werden im fünften Jahr ihrer Betriebszeit defekt und durch neue ersetzt. 60 % der Energiesparlampen, die sich im fünften Jahr ihrer Betriebszeit befinden, werden in dem Jahr nicht defekt. Die 6. Spalte zeigt, dass Energiesparlampen in diesem Modell höchstens sechs Jahre leuchten.

(2) $$P^2\cdot\begin{pmatrix}1000\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}160\\210\\630\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix}0{,}3&0{,}1&0{,}1&0{,}3&0{,}4&1\\0{,}7&0&0&0&0&0\\0&0{,}9&0&0&0&0\\0&0&0{,}9&0&0&0\\0&0&0&0{,}7&0&0\\0&0&0&0&0{,}6&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{c}0{,}3a+0{,}1b+0{,}1c+0{,}3d+0{,}4e+f=r\cdot a\\0{,}7a=r\cdot b\\0{,}9b=r\cdot c\\0{,}9c=r\cdot d\\0{,}7\cdot d=r\cdot e\\0{,}6e=r\cdot f\end{array}\right|$$

Summiert man die einzelnen Einträge der Verteilung auf, ergibt sich:

$a+b+c+d+e+f=r\cdot(a+b+c+d+e+f)$

$\Leftrightarrow (1-r)\cdot(a+b+c+d+e+f)=0$.

Da die Gesamtzahl der Lampen positiv ist, kann es kein r mit $0<r<1$ geben.

Teilaufgabe c)

(1) Die Altersverteilungen der ersten zwei Jahre sind:

$$v_1=\begin{pmatrix}200a\\(1-a)\cdot 200\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}200a^2+0{,}6\cdot(1-a)\cdot 200\\(1-a)\cdot 200a\\0{,}4\cdot(1-a)\cdot 200\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Die Summe der neuen Lampen (Einträge $J1$) muss 200 ergeben. Die zugehörige Gleichung lautet: $200 = 200a + 200a^2 + 0{,}6 \cdot (1 - a) \cdot 200$. Hieraus folgt $a \approx 0{,}463$ oder $a \approx -0{,}863$. Da $a \geq 0$, ist $0{,}46$ der gesuchte Anteil an Energiesparlampen, die im ersten Jahr ihrer Betriebszeit defekt werden.

(2) Der Hausmeister hat genauso viele Energiesparlampen ausgewechselt, wie es Lampen im Gebäude gibt. Dies bedeutet jedoch nicht zwangsläufig, dass jede Energiesparlampe in den zwei Jahren genau einmal erneuert worden ist. Manche Energiesparlampen haben z. B. eine Lebenszeit von mehr als zwei Jahren, während an anderen Stellen die Lampen häufiger zu erneuern sind.

Teilaufgabe d)

(1) Die Zufallsgröße *X: Anzahl der fehlerhaften Lampen* kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 250$ und $p = 0{,}01$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $P(X \leq 5) \approx 0{,}959$. (Der Wert kann z. B. durch die kumulierte Binomialverteilungsfunktion des GTR *BinomialCD* und Eingabe der Parameter ermittelt werden.)

(2) $f(p) = P_p(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 = 10 \cdot p^3 \cdot (1 - 2p + p^2) = 10 \cdot (p^5 - 2p^4 + p^3)$.

(3) $f'(p) = 10 \cdot (5p^4 - 8p^3 + 3p^2)$. $f'(p) = 0$ liefert die Nullstellen $p = 0$; $p = \frac{3}{5}$; $p = 1$.

Für $p = 0$ (bei keiner Lampe liegt ein Gutschein) und $p = 1$ (bei jeder Lampe liegt ein Gutschein) ist das Ereignis „Bei genau 3 von 5 Lampen liegt ein Gutschein“ ein unmögliches Ereignis. Deshalb hat die Wahrscheinlichkeit für diese beiden Werte von p ein Minimum: $f(0) = 0 = f(1)$.

An der Stelle $p = \frac{3}{5}$ liegt ein Vorzeichenwechsel in $f'(p)$ von $+$ nach $-$ vor. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei genau 3 von 5 Lampen ein Gutschein liegt, ist für $p = \frac{3}{5}$ maximal.

($f\left(\frac{3}{5}\right) = 34{,}56\,\%$. Für $n = 5$ und $p = \frac{3}{5}$ ist 3 der Erwartungswert.)

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt den beschriebenen Sachverhalt in einem geeigneten Diagramm dar.	4			
2	(2) berechnet die durchschnittlich zu erwartende Lebensdauer der Glühlampen.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) interpretiert die 5. und 6. Spalte der Matrix P im Sachkontext.	4			
2	(2) bestimmt die Altersverteilung der Energiesparlampen nach 2 Jahren.	2			
3	(3) beurteilt, ob eine reelle Zahl r mit $0 < r < 1$ existiert, sodass die Gleichung $P \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v}$ gilt.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK[3]**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt den Anteil a auf 2 Nachkommastellen genau.	6			
2	(2) prüft die genannte Behauptung.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 250 Energiesparlampen höchstens 5 Lampen fehlerhaft sind.	2			
2	(2) zeigt, dass die dargestellte Wahrscheinlichkeit mit der Funktion $f(p) = 10 \cdot \left(p^5 - 2p^4 + p^3\right)$ beschrieben werden kann.	4			
3	(3) bestimmt die Nullstellen der ersten Ableitung.	3			
4	(3) interpretiert die Nullstellen im Sachzusammenhang.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

	Summe insgesamt	**40**			

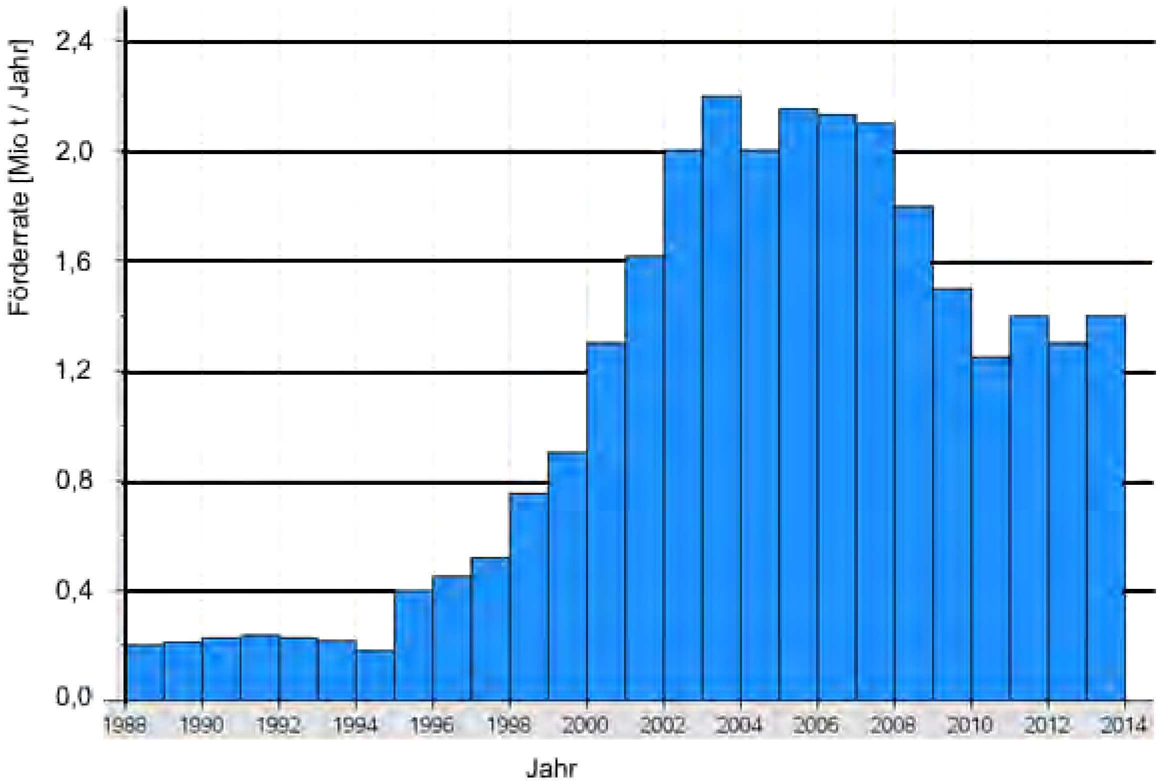
[3] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan
Beispielaufgabe

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Vor der Nordseeküste befindet sich die größte deutsche Erdöllagerstätte Mittelplate. Seit Dezember 1987 wird sie mit Bohrungen bis 3.000 Meter Tiefe erschlossen (Bohranlage 1). Seit Anfang 2005 wird ***zusätzlich*** mit Bohrlängen bis zu 8000 Metern gefördert (Bohranlage 2). Seit 2011 wird wiederum ***zusätzlich*** noch eine andere innovative Bohrtechnik angewendet (Bohranlage 3).
Die folgende Grafik[1] (Abbildung) zeigt die Förderraten von Mittelplate von Anfang 1988 $(t=0)$ bis Ende 2013. Die Förderraten werden in Millionen Tonnen Öl pro Jahr angegeben.



Abbildung

[1] Quelle: http://www.rwe.com/web/cms/de/155150/mittelplate/home/forderkonzept/forderentwicklung

a) Zur Modellierung der Förderraten werden die Funktionen g mit $g(t) = 0{,}06 \cdot e^{0{,}25t}$, $t \geq 0$, und f mit $f(t) = 0{,}2 \cdot e^{0{,}28 \cdot t} - 0{,}1 \cdot e^{0{,}315 \cdot t}$, $t \geq 0$, vorgeschlagen.

(1) Berechnen Sie für die in der Tabelle angegebenen Jahreszahlen die Funktionswerte von g und f.

Anfang des Jahres	1988	1995	1999	2002	2005
t	0	7	11		
$g(t)$					
$f(t)$					

Tabelle

(2) Zeichnen Sie mit Hilfe des GTR die Graphen von g und f und übertragen Sie einen geeigneten Ausschnitt der Graphen in das Diagramm (Abbildung, S. 1).

(3) Vergleichen Sie anhand der Graphen beide Funktionen im Hinblick auf eine Modellierung der Förderraten von Mittelplate im Zeitraum bis 2005.
Begründen Sie, warum g für eine Modellierung über das Jahr 2005 hinaus nicht geeignet ist.

(4 + 5 + 7 Punkte)

b) Im Folgenden wird zur Modellierung der Förderrate von Bohranlage 1 die Funktion f mit $f(t) = 0{,}2 \cdot e^{0{,}28 \cdot t} - 0{,}1 \cdot e^{0{,}315 \cdot t}$, im Bereich von $t = 0$ bis zu ihrer Nullstelle $t_N \approx 19{,}8$ verwendet.

(1) Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen von f für $17 \leq t \leq t_N$ im Sachzusammenhang.

(2) Ermitteln Sie die größte Förderrate, die in diesem Modell erreicht wird.

(3) $V(t)$ bezeichnet die gesamte von $t = 0$ bis zu einem Zeitpunkt t $(0 \leq t \leq t_N)$ geförderte Erdölmenge (in Millionen Tonnen).
Weisen Sie nach, dass in diesem Modell gilt: $V(t) = \frac{5}{7} \cdot e^{0{,}28t} - \frac{20}{63} \cdot e^{0{,}315t} - \frac{25}{63}$.

Ab 2005 gelang es, durch die zusätzlichen Bohranlagen 2 und 3 die Förderraten in den nächsten zwei Jahren noch annähernd auf dem Stand von 2005 ($t=17$) zu halten, danach gingen sie immer weiter zurück. Aus der Abbildung können Sie näherungsweise die durchschnittlichen Förderraten der folgenden Jahre ablesen.

(4) *Ermitteln Sie, wie viel Erdöl ab Anfang 2005 noch durch die Bohranlage 1, deren Förderrate durch f modelliert wird, gewonnen werden konnte.*
[Zur Kontrolle: ca. 4 Mio. Tonnen]

(5) *Bestimmen Sie mit Hilfe der Abbildung näherungsweise, wieviel Erdöl in etwa von Anfang 2005 bis Ende 2013 durch die eingesetzten Bohranlagen gegenüber der durch die Funktion f beschriebenen Förderrate der Bohranlage 1 zusätzlich gewonnen wurde.*

(3 + 6 + 4 + 2 + 4 Punkte)

c) Betrachten Sie nun unabhängig vom Kontext die Funktion f mit

$$f(t)=0{,}2\cdot e^{0{,}28\cdot t}-0{,}1\cdot e^{0{,}315\cdot t},\ t\geq 0.$$

In den Exponenten wird zu beiden Faktoren (0,28 und 0,315) jeweils die gleiche Zahl a addiert.

Begründen Sie, dass sich dadurch die Nullstelle von f nicht ändert.

(5 Punkte)

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan Beispielaufgabe

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis, Exponentialfunktionen in Sachzusammenhängen

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

http://www.rwe.com/web/cms/de/155150/mittelplate/home/forderkonzept/forderentwicklung

4. Bezüge zum neuen Kernlehrplan und zu den Vorgaben

1. Inhaltliche Schwerpunkte
(Funktionen und Analysis)

- Funktionen als mathematische Modelle
- Fortführung der Differentialrechnung
  - Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von einem Parameter bei ganzrationalen Funktionen
  - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x) \cdot e^{ax+b}$, wobei $p(x)$ ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
  - einfache Summe der oben genannten Funktionstypen
- Grundverständnis der Integralrechnung
- Integralrechnung

2. Medien/Materialien

entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

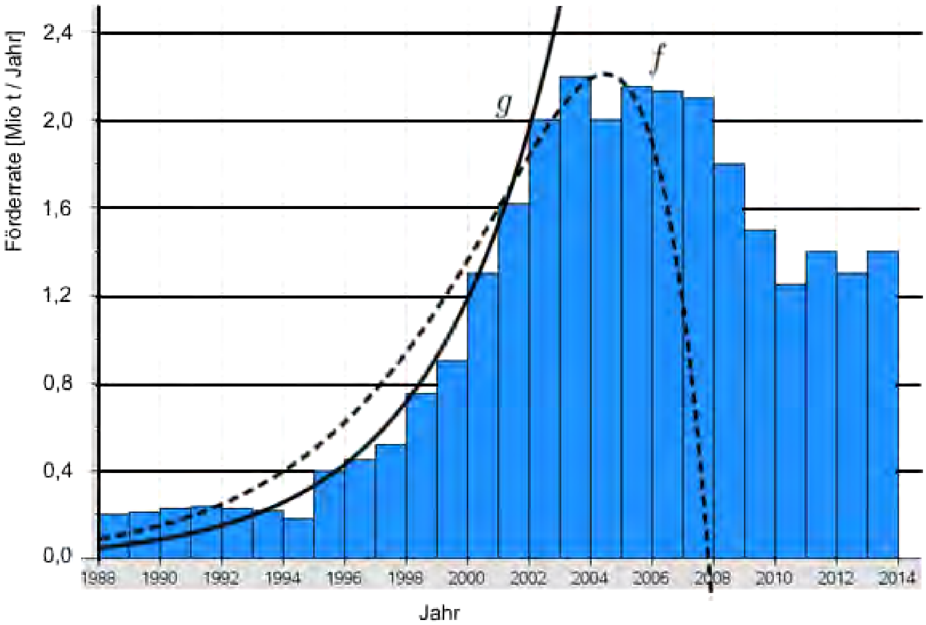
Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $g(t) = 0{,}06 \cdot e^{0{,}25 \cdot t}$ und $f(t) = 0{,}2 \cdot e^{0{,}28 \cdot t} - 0{,}1 \cdot e^{0{,}315 \cdot t}$, $t \geq 0$

Anfang des Jahres	1988	1995	1999	2002	2005
t	0	7	11	14	17
$g(t)$	0,06	0,345	0,939	1,987	4,206
$f(t)$	0,1	0,513	1,154	1,853	2,183

(2)



Abbildung, ergänzt um die Graphen von f und g

(3) Beide Funktionen bilden bis zum Jahr 2002 $(t = 14)$ die Tatsache ab, dass die Förderraten in diesem Zeitraum immer weiter gestiegen sind.

Bis $t = 14$ (2002) liegt der Graph der Exponentialfunktion g sehr dicht an den realen Messdaten. Danach steigt der Graph aber immer stärker und entfernt sich zunehmend von den gezeichneten Säulen.

f liegt hingegen im Zeitraum von 1993 bis 1999 $(t = 11)$ über den gemessenen Werten, danach steigt der Graph allerdings zunehmend weniger an und bildet ab 2002 die

Tatsache ab, dass die Förderraten zunächst ebenfalls langsamer zunehmen und im Jahr 2003 maximal sind. Die Modellfunktion erreicht den Hochpunkt erst im Jahr 2004. Über 2005 hinaus ist eine Modellierung durch g trotz der anfänglich besseren Passung zu den Messwerten nicht geeignet, da die Funktion weiterhin monoton steigt, während die Förderraten tendenziell sinken.

Teilaufgabe b)

(1) Nach dem Erreichen des Hochpunkts (ca. 2005) sinken die Förderraten sehr schnell und gehen bis zum Ende des Jahres 2007 bis auf 0 Millionen Tonnen pro Jahr zurück. D. h., dass zu diesem Zeitpunkt die Förderung eingestellt wird. Ein Grund für diesen Rückgang könnte sein, dass in dem Ölfeld nicht weiter gefördert werden kann.

(2) Die größte Förderrate entspricht dem Maximum der Funktion f.

Die notwendige Bedingung: $f'(t_E)=0 \;\Leftrightarrow 0{,}056\cdot e^{0,28t_E}-0{,}0315\cdot e^{0,315t_E}=0$ führt auf die Gleichung $e^{0,035t_E}=\frac{560}{315}$ mit der Lösung $t_E\approx 16{,}439$.

Es gibt also nur eine mögliche Maximalstelle. Aus dem Graphen von f kann man entnehmen, dass der Graph vorher steigt und nachher fällt, sodass es sich tatsächlich um eine Maximalstelle handelt.

$f(t_E)\approx 2{,}217$

Die größte Fördermenge lag nach diesem Modell bei ca. 2,2 Mio. t/Jahr.

(3) Die Gesamtmenge des geförderten Erdöls lässt sich als Integral von f berechnen.

$$V(t)=\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^t 0{,}2\cdot e^{0,28x}-0{,}1\cdot e^{0,315x}\,dx.$$

Zu zeigen: V ist eine Stammfunktion von f und $V(0)=0$.

$$V(t)=\frac{5}{7}\cdot e^{0,28t}-\frac{20}{63}\cdot e^{0,315t}-\frac{25}{63}$$

$$\Rightarrow V'(t)=\frac{5}{7}\cdot\frac{28}{100}\cdot e^{0,28t}-\frac{20}{63}\cdot\frac{315}{1000}\cdot e^{0,315t}=\frac{1}{5}\cdot e^{0,28t}-\frac{1}{10}\cdot e^{0,315t}=f(t).$$

V ist also eine Stammfunktion von f und $V(0)=\frac{5}{7}-\frac{20}{63}-\frac{25}{63}=0$.

(4) $V(t_N)-V(17)\approx V(19{,}8)-V(17)\approx 19{,}921-15{,}798=4{,}123\approx 4.$

Man konnte mit der alten Anlage noch ca. 4 Mio. t Erdöl fördern.

(5) Die gesamte Fördermenge aus diesem Zeitraum erhält man durch Addition der aus der Abbildung näherungsweise abgelesenen durchschnittlichen Förderraten, jeweils multipliziert mit 1 Jahr.
Zum Beispiel: $3 \cdot 2{,}1 + 1{,}8 + 1{,}5 + 1{,}2 + 1{,}4 + 1{,}3 + 1{,}4 = 14{,}9 \approx 15.$
Es wurden ungefähr 15 Mio. Tonnen Erdöl von Anfang 2005 bis Ende 2013 gefördert.
$15 - 4{,}12 \approx 10{,}9.$
Zusätzlich wurden durch die neue Anlage also ca. 11 Mio. Tonnen Öl gefördert.

Teilaufgabe c)

Zunächst wird zu beiden Faktoren die Zahl a addiert, danach wird der Funktionsterm gleich 0 gesetzt.

$$0{,}2 \cdot e^{(0{,}28+a)\cdot t} - 0{,}1 \cdot e^{(0{,}315+a)\cdot t} = 0$$
$$\Leftrightarrow 0{,}2 \cdot e^{(0{,}28+a)\cdot t} = 0{,}1 \cdot e^{(0{,}315+a)\cdot t}$$
$$\Leftrightarrow 0{,}2 \cdot e^{0{,}28\cdot t} \cdot e^{a\cdot t} = 0{,}1 \cdot e^{0{,}315\cdot t} \cdot e^{a\cdot t}$$

Da $e^{a\cdot t} \neq 0$, kann man beide Seiten der Gleichung durch $e^{a\cdot t}$ dividieren. Damit ist die Lösung dieser Gleichung unabhängig von a und stimmt mit der Lösung der Gleichung $0{,}2 \cdot e^{0{,}28\cdot t} - 0{,}1 \cdot e^{0{,}315\cdot t} = 0$ überein.

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK[1]	ZK	DK
1	(1) berechnet die Funktionswerte zu den angegebenen Jahreszahlen.	4			
2	(2) zeichnet die Graphen von g und f in Abbildung 1 ein.	5			
3	(3) vergleicht anhand der Graphen beide Funktionen im Hinblick auf eine Modellierung.	5			
4	(3) begründet, warum g für eine langfristige Modellierung nicht geeignet ist.	2			
sachlich richtige Alternativen: (16) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**16**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) interpretiert den Verlauf von f für $17 \le t \le t_N$ im Sachzusammenhang.	3			
2	(2) ermittelt die größte Förderrate.	6			
3	(3) weist den Funktionsterm für die geförderte Erdölmenge nach.	4			
4	(4) ermittelt, wie viel Erdöl noch ab 2005 mit der alten Bohranlage gefördert wurde.	2			
5	(5) bestimmt mit Hilfe der Abbildung näherungsweise, wieviel Erdöl durch die eingesetzten Bohranlagen im angegebenen Zeitraum gewonnen wurde.	4			
sachlich richtige Alternativen: (19) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**19**			

[1] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
	begründet, dass sich die Nullstelle nicht ändert.	5			
sachlich richtige Alternativen: (5) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

	Summe insgesamt	**40**			

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan Beispielaufgabe

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung[1]:

Laut ADFC (Allgemeiner Deutscher Fahrrad Club) nutzen zwei Drittel aller Deutschen ihr Fahrrad privat oder auf dem Weg zur Arbeit wenigstens einmal im Monat.
In der gesamten Aufgabe sollen alle genannten Anteile als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

a) In einer repräsentativen Umfrage werden 100 zufällig ausgewählte Deutsche befragt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

(1) *E_1: Unter den Befragten nutzen genau 70 wenigstens einmal im Monat ihr Fahrrad.*

(2) *E_2: Unter den Befragten nutzen mindestens 70 wenigstens einmal im Monat ihr Fahrrad.*

(3) *E_3: Unter den Befragten nutzen mehr als 60 und höchstens 70 wenigstens einmal im Monat ihr Fahrrad.*

(2 + 3 + 3 Punkte)

b) Bei Kontrollen der Polizei werden Fahrräder, die Mängel aufweisen, beanstandet. Bei diesen Prüfungen hat durchschnittlich ein Sechstel der Fahrräder Mängel.

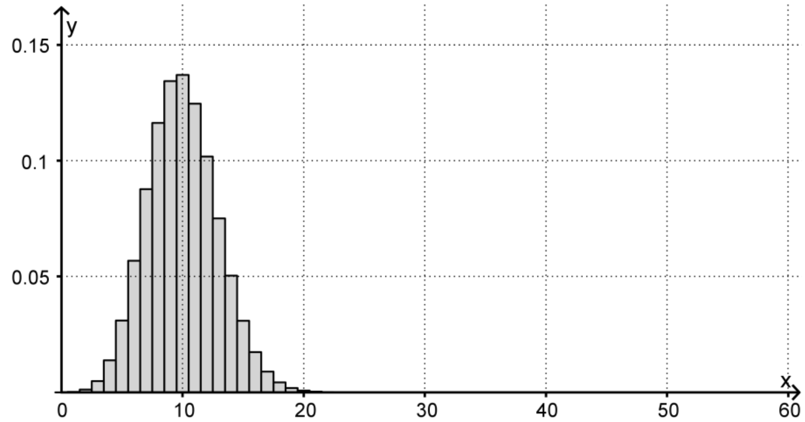


Abbildung: Binomialverteilung mit den Parametern $n = 60$ und $p = \frac{1}{6}$

(1) *Beschreiben Sie die Abbildung im Sachzusammenhang.*

(2) *Erklären Sie, wie sich die Abbildung verändert, wenn der Parameter n größer wird.*

(3) *Bestimmen Sie die Anzahl n der Fahrräder, die von der Polizei mindestens kontrolliert werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % wenigstens ein Fahrrad mit Mängeln entdeckt wird.*

(4 + 4 + 6 Punkte)

---

[1] Quelle: Abitur NRW M GK 2013

c) Die Einsatzleitung der Polizei vermutet, dass wegen der häufigen Kontrollen mittlerweile weniger als 10 % der Fahrräder Mängel aufweisen. Sie möchte diese Vermutung anhand einer Stichprobe von 200 Fahrrädern überprüfen. Werden weniger als 13 Fahrräder mit Mängeln in der Stichprobe gefunden, geht die Polizei davon aus, dass ihre Vermutung richtig ist. Als Konsequenz wird sie dann die Häufigkeit der Kontrollen reduzieren.

Nehmen Sie an, dass tatsächlich nur noch 8 % aller Fahrräder Mängel aufweisen.

Berechnen Sie für $p = 0{,}08$ *die Wahrscheinlichkeit* $P(X > 12)$ *und beschreiben Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang.*

(5 Punkte)

d) Die Nutzung des Fahrrads als **regelmäßiges Verkehrsmittel auf dem Weg zur Arbeit** hängt unter anderem von der Ortsgröße ab.

Ortsgröße	Anteil der Personen in der Bevölkerung, die in einem Ort der angegebenen Ortsgröße leben[2]	**davon** regelmäßige Nutzung des Fahrrads[3]
unter 20 000 Einwohner	40,4 %	37,0 %
über 20 000 Einwohner	59,6 %	42,5 %

(1) *Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar und berechnen Sie alle resultierenden Pfadwahrscheinlichkeiten (1. Stufe: Ortsgröße).*

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus der Bevölkerung zufällig ausgewählte Person regelmäßig ein Fahrrad als Verkehrsmittel nutzt.*

(6 + 2 Punkte)

e) Studien zeigen, dass Personen, die beim Fahrradfahren keinen Helm tragen, ein viermal so hohes Risiko für schwere Verletzungen eingehen wie Personen, die einen Helm tragen. Unabhängig davon reduziert sich das Unfallrisiko bei 20- bis 40-jährigen Fahrradfahrerinnen und Fahrradfahrern auf 55 % des Risikos bei 10- bis 15-jährigen Kindern.

Bestimmen Sie, um wie viel Prozent bei einem 10- bis 15-jährigen Kind, das keinen Helm trägt, das Risiko für eine schwere Verletzung höher ist als bei einer 20- bis 40-jährigen Person, die einen Helm trägt.

(5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[2] Quelle: Laufende Raumbeobachtung des Bundesamtes für Bauwesen und Raumordnung (2011)
[3] Fahrradmonitor des ADFC

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan Beispielaufgabe

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Binomialverteilung (ohne Stochastische Matrizen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe[2]

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.
[2] Die Aufgabe ist dem Aufgabensatz vom Abitur 2013 entnommen und dem KLP GOSt 2014 angepasst worden.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der regelmäßigen Fahrradnutzer unter den 100 befragten Personen. X sei binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = \frac{2}{3}$.

(1) E_1: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$P(E_1) = P\left(X = 70\right) \overset{GTR}{\approx} 0{,}0673$, mit $binomPdf\left(100|\frac{2}{3}|70\right)$.

(2) E_2: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$P(E_2) = P\left(X \geq 70\right) \overset{GTR}{\approx} 0{,}2766$, mit $binomCdf\left(100|\frac{2}{3}|70|\ 100\right)$.

(3) E_3: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$P(E_3) = P\left(60 < X \leq 70\right) = P\left(61 \leq X \leq 70\right) \overset{GTR}{\approx} 0{,}6941$, mit $binomCdf\left(100|\frac{2}{3}|61|\ 70\right)$.

Teilaufgabe b)

(1) In der Abbildung ist eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 60$ und $p = \frac{1}{6}$ dargestellt. Insgesamt werden in der Kontrolle $n = 60$ Fahrräder untersucht. Ein kontrolliertes Fahrrad weist mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ Mängel auf.

(2) Mit größer werdendem n (Anzahl der untersuchten Fahrräder) verschiebt sich das Maximum der Verteilung, das beim Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ angenommen wird, nach rechts. Die Verteilung wird flacher und breiter, die Streuung mit wachsendem n ebenfalls größer wird.

(3) Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Fahrräder mit Mängeln. X ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{6}$ und unbekanntem n. Die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$ kann durch systematisches Probieren mit dem GTR (Befehl *binomCdf*) gelöst werden.

Für $n = 12$ gilt $P(X \le 1) \overset{GTR}{\approx} 0{,}887$ und für $n = 13$ gilt $P(X \le 1) \overset{GTR}{\approx} 0{,}906$. Also ist für $n = 13$ der Wert erstmals größer als 0,9. Es müssen mindestens 13 Fahrräder von der Polizei kontrolliert werden.

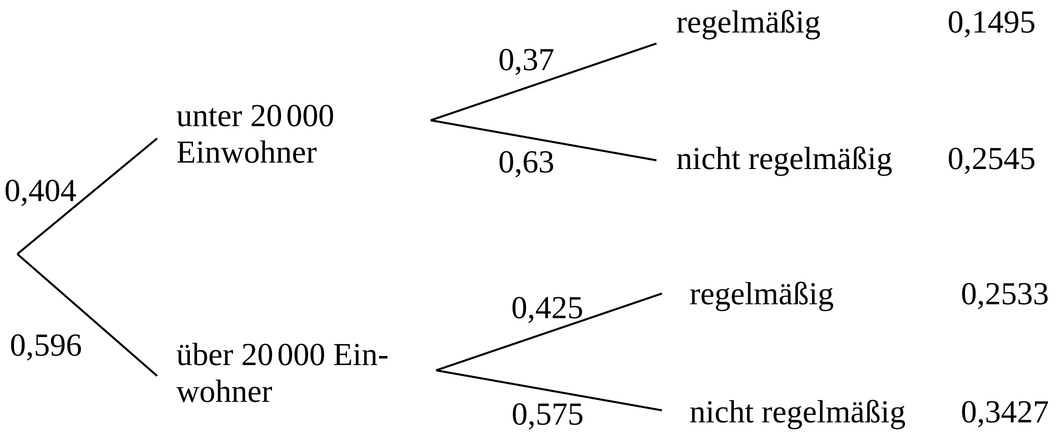
Teilaufgabe c)

$P_{0,08}(X > 12) \overset{GTR}{\approx} 0{,}82$ (mit $binomCdf(200\,|\,0{,}08\,|\,13\,|\,200)$ ermittelt).

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 82 % wird die Polizei in der Stichprobe mehr als 12 Fahrräder mit Mängeln finden, obwohl $p = 0{,}08$ gilt. In diesem Fall wird die Einsatzleitung der Polizei die Häufigkeit der Kontrollen nicht reduzieren.

Teilaufgabe d)

(1)



(2) $P(\text{"regelm. Nutzung"}) = 0{,}404 \cdot 0{,}37 + 0{,}596 \cdot 0{,}425 = 0{,}40278$.

Teilaufgabe e)

Zur Veranschaulichung der Situation kann folgende Tabelle helfen:

	mit Helm	ohne Helm
10 bis 15 Jahre	x	$4x$
20 bis 40 Jahre	$0{,}55x$	$2{,}2x$

Das gesuchte Verhältnis beträgt also: $4x : (0{,}55x) \approx 7{,}27$.

Damit ist das Verletzungsrisiko auf das ca. 7,27-Fache erhöht, es ist um ca. 627 % höher als bei einem älteren Fahrradfahrer, der einen Helm trägt.

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[3]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
2	(2) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
3	(3) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt die Abbildung im Sachzusammenhang.	4			
2	(2) erklärt die Veränderungen mit wachsendem *n*.	4			
3	(3) bestimmt die Anzahl der Fahrräder, die mindestens kontrolliert werden müssen.	6			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**14**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
2	beschreibt die Bedeutung im Sachzusammenhang.	3			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

[3] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar.	2			
2	(1) berechnet alle resultierenden Pfadwahrscheinlichkeiten.	4			
3	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**8**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt den gesuchten Prozentsatz.	5			
sachlich richtige Alternativen: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

	Summe insgesamt	**40**			

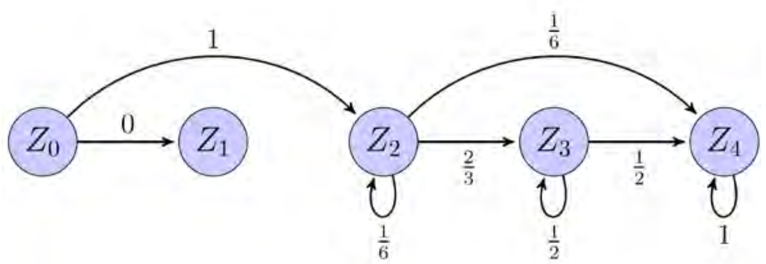
Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan – Beispielaufgabe

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Eine große Tankstelle möchte ihren Umsatz durch eine Werbemaßnahme steigern. Ab einer Tankfüllung im Wert von mindestens 50 € erhält der Kunde ein Tütchen mit zwei kleinen Modellautos. Insgesamt gibt es vier unterschiedliche Modellautos A, B, C, und D. In jedem Tütchen befinden sich zwei *unterschiedliche* Autos. Jede Kombination von unterschiedlichen Modellautos ist während der Dauer der Werbekampagne gleich wahrscheinlich.

a) Das Sammeln der Modellautos wird als zufälliger Prozess mit fünf verschiedenen Zuständen betrachtet. Zustand Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 bedeutet, dass man Modellautos 0, 1, 2, 3 oder 4 verschiedene Modellautos besitzt. Der Sammelprozess wird in folgendem Diagramm dargestellt:



(1) Geben Sie alle möglichen Kombinationen der Modellautos in den Tütchen an und erklären Sie die im Diagramm genannten Wahrscheinlichkeiten.

(2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Erhalt von drei Tütchen das Modell D nicht dabei ist.

(3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Erhalt von drei Tütchen genau ein beliebiges Modell nicht dabei ist.

(7 + 3 + 3 Punkte)

b) Der Sammelprozess kann auch durch folgende Matrix U beschrieben werden:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(1) *Begründen Sie, warum die 3×3 Matrix den Sammelprozess auch vollständig beschreibt.*

(2) *Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\begin{pmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$ für die Zustände Z_2, Z_3 und Z_4 nach dem Erhalt von einem Tütchen und von zwei Tütchen.*

(3) *Bestimmen Sie die Anzahl der Tütchen, die notwendig sind, um mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit alle vier Modellautos zu erhalten.*

(4 + 4 + 7 Punkte)

c) Die Marketingabteilung des Mineralölkonzerns, der die benachbarte Tankstelle betreibt, entwickelt nun in Konkurrenz ebenfalls eine Werbeaktion. Jeder Kunde erhält an der Kasse einen Schlüsselanhänger. Diese Schlüsselanhänger werden in großer Anzahl von einem Hersteller produziert, der seinen Kunden „Qualitätsware“ mit einem Ausschussanteil $p \leq 1\%$ verspricht. Vor der Auslieferung findet eine stichprobenartige Kontrolle statt.

Es werden 1000 zufällig der Produktion entnommene Schlüsselanhänger kontrolliert. Erst wenn mindestens 16 defekte Schlüsselanhänger in der Stichprobe gefunden werden, geht man von schlechter Qualität der Produktion aus und liefert nicht aus.

(1) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P_N, dass nicht ausgeliefert wird, obwohl tatsächlich „Qualitätsware“ mit genau 1 % Ausschuss hergestellt wird. Geben Sie an, welche Modellannahme Ihrer Rechnung zugrunde liegt.*
[Kontrollergebnis: $P_N = 0{,}048$]

(2) Jemand schlägt vor nicht auszuliefern, wenn eine doppelt so große Stichprobe mindestens 32 defekte Schlüsselanhänger enthält.

Beurteilen Sie die Aussage: „Bei weiterhin genau 1 % Ausschussanteil bleibt mit diesem Vorschlag die Wahrscheinlichkeit, dass nicht ausgeliefert wird, gleich.“

(3) Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl defekter Schlüsselanhänger in der Stichprobe.
Ermitteln Sie für $p = 0{,}02$ und $n = 1000$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 15)$ und beschreiben Sie die Bedeutung im Sachkontext.

(5 + 3 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan Beispielaufgabe

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Schwerpunkt Stochastische Matrizen

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben

1. Inhaltliche Schwerpunkte
- Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Binomialverteilung
- Stochastische Prozesse

2. Medien/Materialien
- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Es gibt sechs verschiedene Kombinationen: A-B / A-C / A-D / B-C / B-D / C-D.
Die Wahrscheinlichkeit 1 bedeutet, dass der folgende Zustand mit Sicherheit erreicht wird. Dies gilt für den Anfangszustand (man hat sofort zwei verschiedene Modellautos, also kann der Zustand 1 – nur ein Modellauto – nicht erreicht werden) und den Endzustand (man hat alle vier Modellautos). Der Prozess bleibt stabil im Zustand 4.
Wenn man zwei Autos besitzt, ist die Wahrscheinlichkeit, im Zustand 2 zu verbleiben, $\frac{1}{6}$, da eines von sechs möglichen Tütchen bereits erworbene Modelle enthält. Ebenso enthält ein Tütchen die beiden anderen Modelle, also hat der Übergang von 2 nach 4 ebenfalls die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Vier von sechs Tütchen enthalten genau ein neues Modellauto, daher tritt der Übergang von 2 nach 3 genau mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ ein.
Wenn man drei verschiedene Modellautos hat, enthält das nächste Tütchen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ ein neues Modell, da jedes beliebige Modell in drei von sechs Tütchen enthalten ist.

(2) Es gibt drei unabhängige Ziehungen. In drei von sechs verschiedenen möglichen Tütchen ist das Modell D enthalten, die Wahrscheinlichkeit, dass Modell D in einem beliebigen Tütchen ist, beträgt somit jeweils $\frac{1}{2}$ (siehe a)).
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

(3) Berechnet werden muss die Wahrscheinlichkeit, nach drei Ziehungen noch in Zustand 3 zu sein. Möglich sind die Pfade 2-2-3 oder 2-3-3.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$.

Teilaufgabe b)

(1) Da der Sammelprozess mit dem Erhalt des ersten Tütchens beginnt, kann der Zustand Z_2 als Ausgangszustand betrachtet werden. Im Prozess sind zudem die Zustände Z_3 und Z_4 möglich. Da ein Übergang in den vorherigen Zustand – man ‚verliert' keine Modellautos mehr –, also von Z_4 nach Z_3 oder Z_2 bzw. von Z_4 nach Z_3, nicht möglich ist, betragen die jeweiligen Übergangswahrscheinlichkeiten 0. Die Wahrscheinlichkeiten für das Verbleiben im Zustand $Z_i,\ i = 2, 3, 4$ sind im Übergangsdiagramm ablesbar und befinden sich in der Diagonalen der Matrix. Die restlichen Übergangswahrscheinlichkeiten sind ebenfalls im Übergangsdiagramm ablesbar.

(2) Nach dem Erhalt von einem Tütchen befindet man sich mit Sicherheit im Zustand 2, d. h., die Wahrscheinlichkeit beträgt 1, die Wahrscheinlichkeit für die Zustände 3 und 4 jeweils 0. Der Zustandsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ beschreibt somit die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten nach dem Erhalt von einem Tütchen.

Nach dem Erhalt des zweiten Tütchens hat man mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ genau zwei verschiedene Modellautos (Z_2), mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ drei verschiedene Modellautos (Z_3) und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ bereits vier verschiedene Modellautos (Z_4):

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung lässt sich auch direkt aus der Matrix *U* ablesen, da die erste Spalte die Übergangswahrscheinlichkeiten von Z_2 nach Z_3 bzw. von Z_2 nach Z_4 beschreibt:

von		Z_2	Z_3	Z_4
nach	Z_2	...	...	...
	Z_3	...	...	...
	Z_4	...	...	...

(3) Lösungsansatz: $U^n \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{x}$

Mittels GTR lässt sich U^n durch schrittweises Einsetzen (Erhöhen der Matrixpotenz *n*) ermitteln: $U^5 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{7776}\\ \frac{121}{1944}\\ \frac{7291}{7776}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0{,}000129\\0{,}062243\\0{,}937629\end{pmatrix}$.

$U^6 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{46656}\\ \frac{91}{2916}\\ \frac{45199}{46656}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0{,}00002\\0{,}03121\\0{,}96877\end{pmatrix}$.

Die Betrachtung der dritten Komponente des Zustandsvektors zeigt: Man muss mindestens 7 Tütchen erwerben, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % alle vier Modellautos zu erhalten.

Teilaufgabe c)

(1) Modellannahme: Es handelt sich um eine binomialverteilte Zufallsgröße X*: Anzahl der defekten Schlüsselanhänger in der Lieferung* mit einer ‚Trefferwahrscheinlichkeit' von $p = 0{,}01$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $P_N = P(X \geq 16) \approx 0{,}048$, ermittelt mit $binomCdf(1000|\ 0{,}01|16|1000)$ oder dem Komplement von $binomCdf(1000|\ 0{,}01|0|15)$ zu 1.

(2) Stichprobenumfang: $n = 2000$ Ausschussanteil $p = 0{,}01$

$P(X \geq 32) \approx 0{,}008$ ermittelt mit $binomCdf(2000|0{,}01|32|2000)$.

Die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe von 2000 Schlüsselanhängern mindestens 32 defekte zu finden, beträgt lediglich 0,8 %, d. h., die getroffene Aussage ist falsch.

Die Zuordnung der Auslieferungswahrscheinlichkeit zum Quotienten aus ‚Anzahl defekter Teile / Stichprobenumfang' ist nicht proportional: Bei einer Verdoppelung des Stichprobenumfangs bei gleichzeitiger Verdoppelung der Entscheidungsgrenze verändert sich die Wahrscheinlichkeit, dass nicht ausgeliefert wird.

(3) $P(X \leq 15) \approx 0{,}15$ ermittelt mit $binomCdf(1000 \mid 0{,}02 \mid 0 \mid 15)$.

Der tatsächliche Anteil defekter Schlüsselanhänger in der Produktion beträgt 2 %. Bei der Stichprobenentnahme finden sich jedoch maximal 15 defekte Teile; es wird somit entschieden, dass die Produktion den Anforderungen genügt, also maximal 1 % fehlerhafte Teile enthält. Somit erfolgt aufgrund der vorgegebenen Entscheidungsregel fälschlicherweise eine Auslieferung. Die Wahrscheinlichkeit für diese falsche Entscheidung beträgt ca. 15 %.

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt alle möglichen Kombinationen an.	2			
2	(1) erklärt die Wahrscheinlichkeiten.	5			
3	(2) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
4	(3) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
sachlich richtige Alternativen: (13) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**13**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[3]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet die vollständige Beschreibung des Sammelprozesses durch die Übergangsmatrix.	4			
2	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach dem Erhalt von einem Tütchen.	2			
2	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach dem Erhalt von zwei Tütchen.	2			
3	(3) bestimmt die Anzahl der Tütchen, die notwendig sind, um mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit alle vier Modellautos zu erhalten.	7			
sachlich richtige Alternativen: (15) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**15**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur
[3] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[4]	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
2	(1) gibt die Modellannahmen an.	3			
3	(2) beurteilt die vorliegende Aussage.	3			
4	(3) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
5	(3) beschreibt die Bedeutung im Sachkontext.	2			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

	Summe insgesamt	**40**			

[4] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan Beispielaufgabe

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Nach Verabreichung eines bestimmten Medikaments an eine Testperson ist die halbstündlich gemessene Wirkstoffkonzentration im Blut in folgender Tabelle notiert worden:

Zeit t [Stunden]	0	0,5	1	1,5	2
Wirkstoffkonzentration $W(t)$ [µg/ml]	0	2,10	1,30	0,55	0,23

a) Der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration soll zunächst mit einer ganzrationalen Funktion k modelliert werden. Dabei wird t als Maßzahl der Zeit zur Einheit 1 Stunde, *k(t)* als Maßzahl der Wirkstoffkonzentration zur Einheit 1 µg/ml aufgefasst. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das Medikament verabreicht worden.

(1) *Bestimmen Sie eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion k vierten Grades, deren Graph durch die in der Tabelle angegebenen fünf Messpunkte verläuft. Dabei sind die Werte der Koeffizienten auf die 4. Nachkommastelle gerundet anzugeben.*

(2) Wenn man auf die 3. Nachkommastelle rundet, ist $k(t) = -1{,}713 \cdot t^4 + 9{,}073 \cdot t^3 - 16{,}412 \cdot t^2 + 10{,}352 \cdot t,\ t \in \mathbb{R}$, näherungsweise eine Gleichung der Funktion k.
Bestimmen Sie den zur Modellierung sinnvollen Definitionsbereich und begründen Sie, warum die Funktion nur innerhalb dieses Intervalls den zeitlichen Verlauf der Wirkstoffkonzentration beschreiben kann.

(5 + 4 Punkte)

Eine alternative Modellierung des zeitlichen Verlaufs der Wirkstoffkonzentration kann näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion *f* mit der Gleichung

$$f(t) = 15 \cdot \left(e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t}\right) = 15 \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \left(e^{t} - 1\right),\ t \geq 0.$$ [1]

Der Graph der Funktion *f* ist in der *Abbildung* auf Seite 2 dargestellt.

b) (1) *Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung des Funktionswerts* $f(0{,}5)$ *vom zugehörigen Tabellenwert* $W(0{,}5)$.

(2) *Begründen Sie, dass es bei der hier verwendeten Modellierung durch die Funktion f nie zu einem vollständigen Abbau des Wirkstoffs im Blut der Testperson käme.*

(2 + 3 Punkte)

---

[1] Die Funktion *f* ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, wird aber nur für $t \geq 0$ zur Modellierung verwendet.

c) (1) *Bestimmen Sie rechnerisch mit Hilfe eines hinreichenden Kriteriums den Zeitpunkt im Intervall* $[0;2]$*, zu dem die durch f beschriebene Wirkstoffkonzentration im Blut der Testperson am größten ist, und berechnen Sie den zugehörigen Maximalwert.*

(2) *Bestimmen Sie die Zeitpunkte im Intervall* $[0;2]$*, zu denen die durch f beschriebene Wirkstoffkonzentration am stärksten ansteigt bzw. am stärksten abfällt, und berechnen Sie jeweils die momentane Änderungsrate der Wirkstoffkonzentration zu diesen Zeitpunkten.*

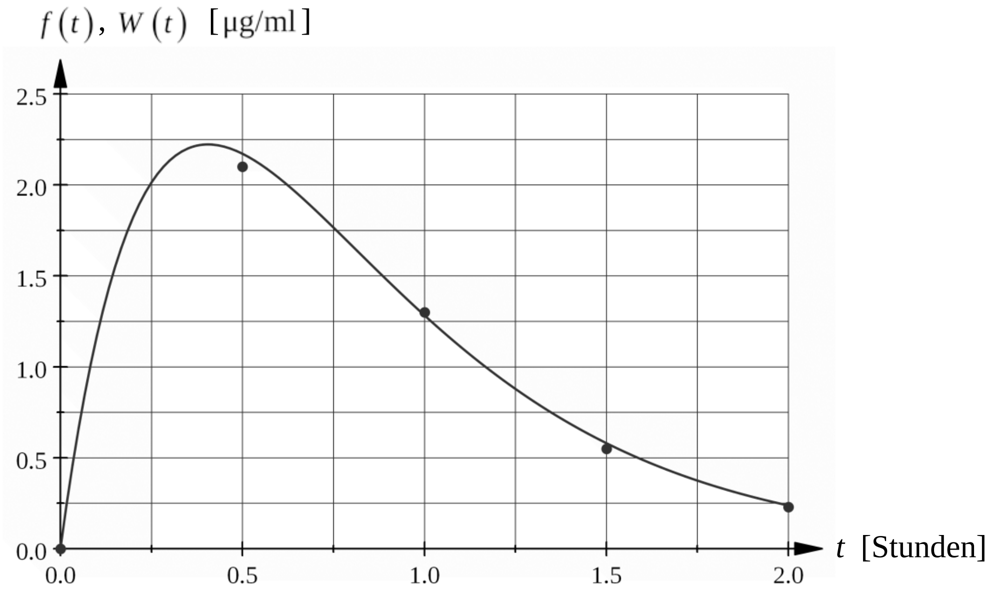
[Zur Kontrolle: $f'(t) = 15 \cdot e^{-3 \cdot t}\left(3 - 2e^{t}\right)$] (8 + 7 Punkte)

d) (1) Man betrachtet die Funktion $F:\ t \mapsto F(t)$, $t \geq 0$, die die Maßzahl der Fläche zwischen dem Graphen von *f* und der *t*-Achse im Intervall $[0;t]$ angibt.
Zeichnen Sie den Graphen von F in die Abbildung ein und begründen Sie sein Steigungsverhalten.

(2) Die Fläche unter der Kurve der Wirkstoffkonzentration ist ein Maß für die Wirkstoffmenge, die insgesamt dem Organismus zur Verfügung steht (Bioverfügbarkeit).

Vergleichen Sie die Maßzahl A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der t-Achse im Zeitintervall $[0;2]$ *mit der Maßzahl B der Fläche zwischen dem Graphen der ganzrationalen Funktion k (aus Aufgabenteil a) und der t-Achse im Zeitintervall* $[0;2]$.
Begründen Sie, dass mit beiden Modellen die Bioverfügbarkeit in diesem Intervall modelliert werden kann.

(4 + 7 Punkte)



Abbildung

Zugelassene Hilfsmittel:

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan Beispielaufgabe

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

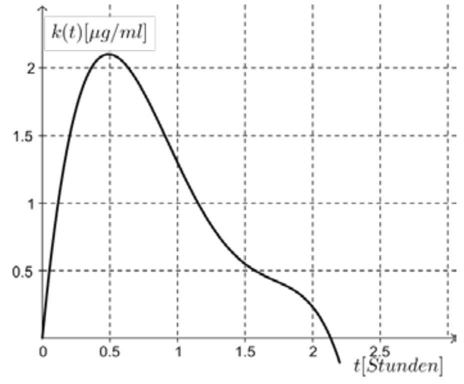
(1) Es sei $k(t) = a \cdot t^4 + b \cdot t^3 + c \cdot t^2 + d \cdot t + e$. Nach Aufgabenstellung erhält man folgendes lineares Gleichungssystem, da $e = 0$ ist:

$$\left| \begin{array}{l} 0{,}0625a + 0{,}125b + 0{,}25c + 0{,}5d = 2{,}1 \\ a + b + c + d = 1{,}3 \\ 5{,}0625a + 3{,}375b + 2{,}25c + 1{,}5d = 0{,}55 \\ 16a + 8b + 4c + 2d = 0{,}23 \end{array} \right|$$

Als Lösung mit dem GTR erhält man:
$a \approx -1{,}7133, b \approx 9{,}0733, c \approx -16{,}4117, d \approx 10{,}3517$.

Also gilt: $k(t) = -1{,}7133 \cdot t^4 + 9{,}0733 \cdot t^3 - 16{,}4117 \cdot t^2 + 10{,}3517 \cdot t,\ t \in \mathbb{R}$.

(2) Die Messwerte werden durch die Funktion k genau erfasst. Für die Wirkstoffkonzentration im Blut erwartet man keine Sprünge und nur einen Maximalwert. Am Graphen von k kann abgelesen werden, dass dies durch die Modellierung erfüllt ist.
Die Wirkstoffkonzentration im Blut muss größer oder gleich Null sein. Für den Definitionsbereich ist daher die Nullstelle rechts von $t = 0$ gesucht, da der Graph der Funktion in diesem Intervall oberhalb der x-Achse verläuft. [Nun arbeitet man mit der in der Aufgabenstellung angegebenen Gleichung der Funktion k weiter.]
$k(t) = 0$ liefert eine weitere Nullstelle bei $t \approx 2{,}134$. [Die beiden Nullstellen $t = 0$ und $t \approx 2{,}134$ sind die einzigen Nullstellen der Funktion $k(t)$.]
Die Funktion k kann maximal im Intervall $[0; 2{,}134]$ sinnvoll zur Modellierung der Messdaten genutzt werden. Für $0 \leq t < 2{,}134$ nimmt k positive Funktionswerte an, rechts von der zweiten Nullstelle werden die Funktionswerte negativ.



[Der Graph der Funktion ist nicht Teil der erwarteten Lösung.]

Teilaufgabe b)

(1) $f(0{,}5) \approx 2{,}171$.

$\frac{f(0{,}5)}{W(0{,}5)} \approx 1{,}034$.

Der Funktionswert $f(0{,}5)$ ist ca. 3,4 % größer als der zugehörige Tabellenwert $W(0{,}5) = 2{,}1$.

(2) $f(t) = 15 \cdot e^{-3t} \cdot \left(e^t - 1\right)$.

Für alle $t > 0$ gilt $e^{-3t} > 0$ und $e^t - 1 > 0$, folglich auch $f(t) > 0$.

Damit ist die Aussage aus der Aufgabenstellung begründet.

Teilaufgabe c)

(1) $f'(t) = \left(15 \cdot \left(e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t}\right)\right)' = 15 \cdot \left(3e^{-3 \cdot t} - 2e^{-2 \cdot t}\right) = 15 \cdot e^{-3 \cdot t}\left(3 - 2e^t\right)$,

$f'(t_m) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2e^{t_m} = 0 \overset{GTR}{\Longleftrightarrow} t_m \approx 0{,}405.$

Da f' an der Stelle t_m das Vorzeichen von + nach – wechselt, ist $f(t_m) = \frac{20}{9} = 2{,}\overline{2}$ lokales Maximum und damit als einziges Extremum im Intervall $[0;2]$ auch globales Maximum der Funktion *f* in diesem Intervall.
Die Wirkstoffkonzentration erreicht zum Zeitpunkt $t_m \approx 0{,}405$ (also nach ca. 24 Minuten) ihren Maximalwert von ca. 2,2 µg/ml.

(2) Die gesuchten Zeitpunkte sind lokale Extremstellen von f' oder Randstellen des Intervalls $[0;2]$.

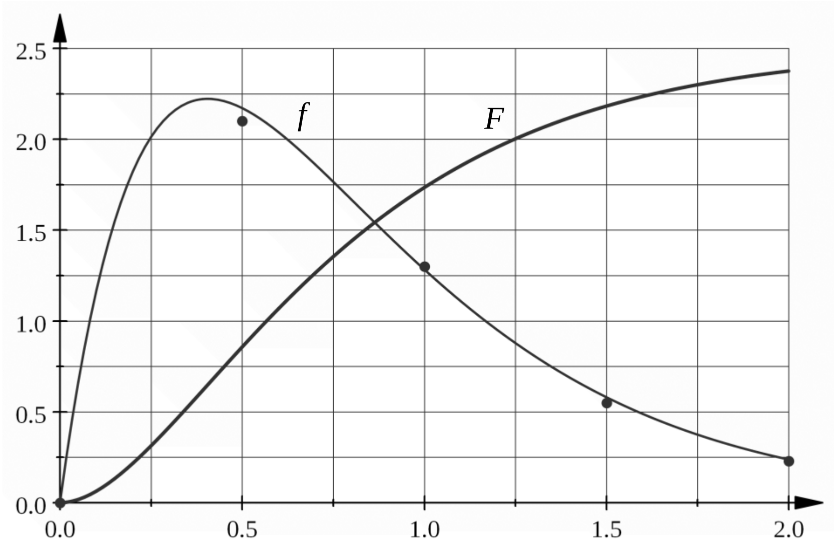
Die einzige lokale Extremstelle kann am Graphen von f' mit dem GTR abgelesen werden und ist der Tiefpunkt in dem Intervall bei $t_w \approx 0{,}811$. Am Graphen erkennt man außerdem, dass der Randwert an der Stelle 0 über demjenigen an der Stelle 2 liegt.

Daraus folgt: $f'(t_w)$ ist globales Minimum, $f'(0) = 15$ globales Maximum von f' im Intervall $[0;2]$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat die momentane Änderungsrate der Wirkstoffkonzentration ihr Maximum von $15\,\frac{\text{µg/ml}}{\text{h}}$, zum Zeitpunkt $t_W \approx 0{,}811$ (also nach ca. 49 Minuten) ihr Minimum von ca. $-1{,}98\,\frac{\text{µg/ml}}{\text{h}}$.

Teilaufgabe d)

(1) Zeichnung des Graphen von *F in der Abbildung ergänzt*:



Der Graph von *F* steigt streng monoton, da der Graph von *f* für $t > 0$ oberhalb der *t*-Achse verläuft und daher der Inhalt der Fläche, die im Intervall $[0;t]$ zwischen diesem und der *t*-Achse liegt, mit wachsendem *t* ständig zunimmt.

(2) Für die gesuchte Maßzahl gilt:

$$A = \int_0^2 f(t)\,dt \overset{GTR}{\approx} 2{,}375 .$$

Berechnung von *B*:

$$B = \int_0^2 k(t)\,dt \overset{GTR}{\approx} 2{,}267 .$$

Der Vergleich kann über die prozentuale Abweichung erfolgen: $\frac{A}{B} = \frac{2{,}375}{2{,}267} \approx 1{,}048$. Die beiden Flächen sind in diesem Intervall annähernd gleich groß, die Maßzahl *A* der Funktion f weicht um weniger als 5 % von der Maßzahl *B* ab.

Vergleicht man diese Abweichung zum Beispiel mit der in b)(1) berechneten Abweichung, so liegt diese in der gleichen Größenordnung. Beide Modelle scheinen daher geeignet zu sein, die Bioverfügbarkeit des Wirkstoffs zu ermitteln.

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[1]	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt eine Gleichung der ganzrationalen Funktion k , wobei die Koeffizienten auf die 4. Nachkommastelle gerundet angegeben werden.	5			
2	(2) bestimmt den Definitionsbereich.	3			
3	(2) begründet, warum die Funktion k nur innerhalb dieses Intervalls den zeitlichen Verlauf der Wirkstoffkonzentration beschreiben kann.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die prozentuale Abweichung des Funktionswerts $f(0{,}5)$ vom zugehörigen Tabellenwert.	2			
2	(2) begründet, dass es bei der Modellierung durch die Funktion f nie zu einem vollständigen Abbau des Wirkstoffs im Blut der Testperson käme.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[1] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt mit Hilfe eines hinreichenden Kriteriums den Zeitpunkt im Intervall $[0;2]$, zu dem die Wirkstoffkonzentration am größten ist.	7			
3	(1) berechnet den zugehörigen Maximalwert.	1			
4	(2) bestimmt die gesuchten Zeitpunkte im Intervall $[0;2]$.	5			
5	(2) berechnet Maximum und Minimum der momentanen Änderungsrate.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) zeichnet den Graphen von F in die *Abbildung* ein.	2			
2	(1) begründet das Steigungsverhalten des Graphen.	2			
3	(2) berechnet die Maßzahl A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der t-Achse im Intervall $[0;2]$.	2			
4	(2) berechnet die Maßzahl B der Fläche zwischen dem Graphen von k und der t-Achse im Intervall $[0;2]$.	2			
5	(2) vergleicht die beiden Maßzahlen.	2			
6	(2) begründet die Eignung beider Modelle.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**11**			

	Summe insgesamt	**40**			

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan Beispielaufgaben

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Die Pyramiden von Gizeh sind das einzige noch heute erhaltene der Sieben Weltwunder der Antike. Sie liegen ca. 15 Kilometer von der Innenstadt von Kairo entfernt direkt am Stadtrand des Vorortes Gizeh in der Wüste. Der quadratische Grundriss der Pyramiden sowie die Ausrichtung nach den Himmelsrichtungen wurden beim Bau sehr exakt eingehalten. In Abbildung 1 ist die Situation vereinfacht in der Draufsicht dargestellt.

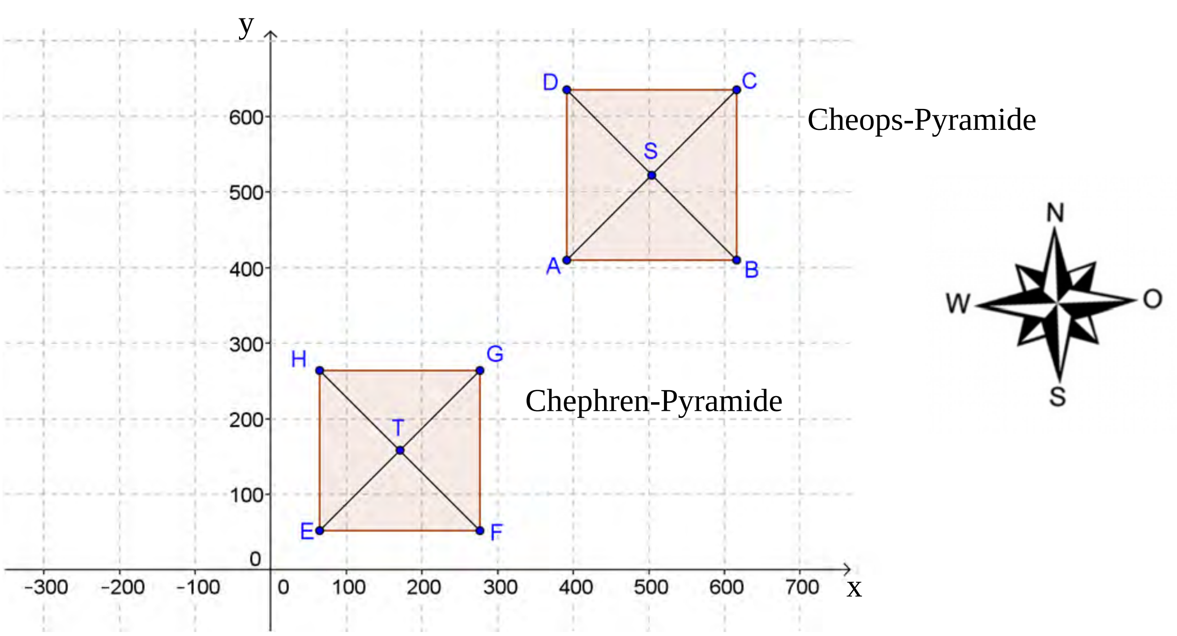


Abbildung 1

Die nachstehend in Metern angegebenen Koordinaten $(x \mid y \mid z)$ beziehen sich auf einen Koordinatenursprung $O(0 \mid 0 \mid 0)$ nahe der südwestlichen Ecke der Chephren-Pyramide (s. Abbildung 1). Die Chephren-Pyramide steht auf der durch $z = 10$ festgelegten Ebene und liegt damit 10 m höher als die größere Cheops-Pyramide, so dass ihre Spitze die der Cheops-Pyramide noch überragt. Abbildung 2 bietet eine perspektivische Ansicht, in der die Ebene $z = 10$ grau getönt ist.

Cheops-Pyramide:	$A(391 \mid 410 \mid 0)$	$B(616 \mid 410 \mid 0)$	Pyramidenhöhe 139 m
	$C(616 \mid 635 \mid 0)$	$D(391 \mid 635 \mid 0)$	$S(503{,}5 \mid 522{,}5 \mid 139)$
Chephren-Pyramide:	$E(65 \mid 52 \mid 10)$	$F(277 \mid 52 \mid 10)$	Pyramidenhöhe 136 m
	$G(277 \mid 264 \mid 10)$	$H(65 \mid 264 \mid 10)$	$T(171 \mid 158 \mid 146)$

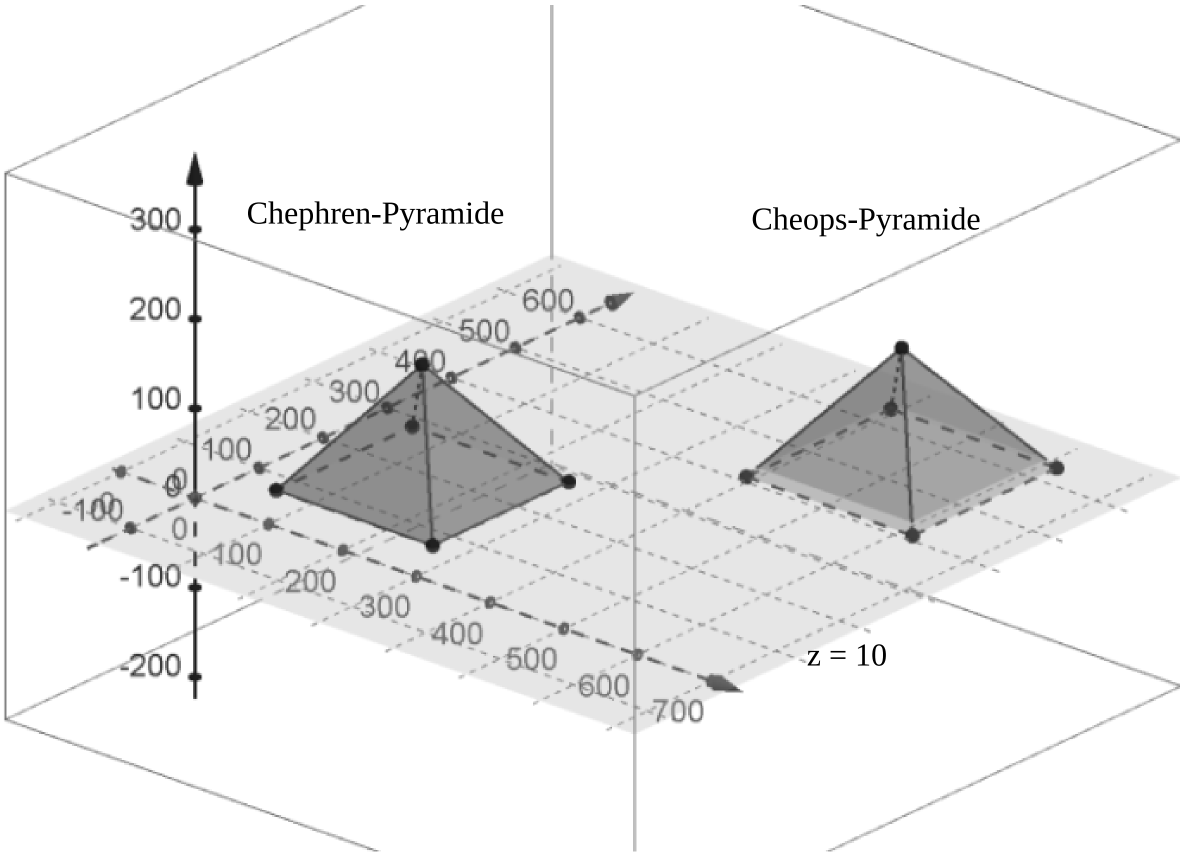


Abbildung 2

a) Diese Teilaufgabe bezieht sich ausschließlich auf die Geometrie der Cheops-Pyramide.

(1) Beschreiben Sie, wie sich die Koordinaten der Eckpunkte D, C, S aus den Koordinaten der Eckpunkte A, B sowie aus der Höhe der Cheops-Pyramide berechnen lassen.

(2) Berechnen sie den (Böschungs-)Winkel, den die Seitenflächen der Cheops-Pyramide mit der Grundebene einschließen.

Um auf möglichst kurzem Wege von der Ecke *B* zur Ecke *D* zu gelangen, ohne die massive Pyramide zu durchbohren, muss man einen Weg auf der Pyramidenoberfläche wählen, der durch einen Punkt der Kante $\overline{AS}$ oder $\overline{CS}$ führt.

(3) Bestimmen Sie die Länge dieser kürzesten Verbindung, die auf der Cheops-Pyramide von der Ecke B zur Ecke D führt.

(4 + 3 + 6 Punkte)

b) Am Morgen des 21. März 2015 um 9:00 Uhr stand die Sonne im Südosten. Der Richtungsvektor der Sonnenstrahlen war $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} -0,7154 \\ 0,3468 \\ -0,6065 \end{pmatrix}$.

(1) *Bestimmen Sie die Größe der Schattenfläche der Chephren-Pyramide in der durch z = 10 definierten Ebene.*

(2) *Erklären Sie durch plausible und realistische Überlegungen, unter welchen Bedingungen kein Schatten in der durch z = 10 definierten Ebene entsteht.*

Am Nachmittag des 21. Dezember 2014 um 15:15 Uhr stand die Sonne tief im Südwesten. Der Schatten der Pyramidenspitze $T(171|158|146)$ traf auf die Cheops-Pyramide in einem Punkt T'. Dabei verlief der gedachte Strahl entlang der Geraden

$g: \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 171 \\ 158 \\ 146 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 333 \\ 301 \\ -146 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in IR)$ von T über T' nach $T''(504|459|0)$.

(3) *Nennen Sie mit Hilfe der Abbildung die Seitenfläche der Cheops-Pyramide, in welcher der Schattenpunkt T´ liegt, und berechnen Sie die Koordinaten von T´.*

(6 + 3 + 9 Punkte)

c) Um die zum Bau benötigten Steinquader in die erforderliche Höhe zu bringen, wurden geradlinige Rampen entlang der Pyramide aufgeschüttet. Im Folgenden soll eine von Westen an die Südseite der Cheops-Pyramide führende Rampe durch eine Strecke betrachtet werden, welche in einem Punkt P in der durch $z = 0$ definierten Ebene beginnt, die Kante $\overline{AS}$ in einem Punkt Q zwischen A und S schneidet und in einem Punkt R auf der Kante $\overline{BS}$ endet. Dies ist in Abbildung 3 in Draufsicht dargestellt.

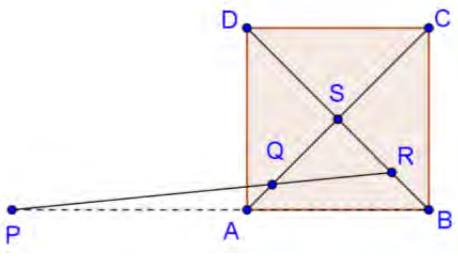


Abbildung 3

(1) *Begründen Sie, weshalb die Punkte P, A, B auf einer Geraden liegen.*

(2) *Ermitteln Sie einen Lösungsplan, wie sich der Startpunkt P der Rampe aus der Vorgabe von R und dem Steigungswinkel α der Rampe gegen die Horizontale bestimmen lässt. Geben Sie für jeden Schritt die notwendigen Gleichungen an.*
Hinweis: Konkrete Rechenschritte sind **nicht** durchzuführen.

(3 + 6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan Beispielaufgabe

Mathematik, Leistungskurs

---

1. Aufgabenart

Geometrie

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben und zum Kernlehrplan

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehung und Abstände
   - Skalarprodukt

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche der Cheops-Pyramide beträgt 225 m. Daraus ergeben sich die fehlenden Eckpunkte $C(616|635|0)$ und $D(391|635|0)$ durch Addition von 225 zur y-Koordinate von B bzw. A. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist $M(503{,}5|522{,}5|0)$, zu berechnen durch Mittelung der Koordinaten von A und C. Aus der Höhe ergibt sich die z-Koordinate von $S(503{,}5|522{,}5|139)$.

(2) Für die Cheops-Pyramide ist $\alpha = \sphericalangle(S, M_{AB}, M)$ der gesuchte Winkel im Dreieck $MM_{AB}S$. Aus $\tan(\alpha) = \dfrac{139}{112{,}5}$ ergibt sich $\alpha \approx 51{,}0°$.

(3) Gesucht ist der doppelte Abstand zwischen B und der Kante $\overline{AS}$. Dazu wird das Lot von B auf die Gerade $g_{AS}:\ \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 391 \\ 410 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 112{,}5 \\ 112{,}5 \\ 139 \end{pmatrix}$ gefällt.

Aus dem Ansatz $\left[\vec{x}(\lambda) - \begin{pmatrix} 616 \\ 410 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 112{,}5 \\ 112{,}5 \\ 139 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -225 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 112{,}5 \\ 112{,}5 \\ 139 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 112{,}5 \\ 112{,}5 \\ 139 \end{pmatrix} = 0$ ergibt sich $\lambda \approx 0{,}567$. Da dieser Wert im Intervall [0;1] liegt, liegt der zugehörige Lotfußpunkt auf der Kante $\overline{AS}$ im Abstand $d = \left\| \begin{pmatrix} -225 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}567 \begin{pmatrix} 112{,}5 \\ 112{,}5 \\ 139 \end{pmatrix} \right\| \approx 190{,}4$ von B. Die gesuchte Länge der kürzesten Verbindung beträgt also ca. 381 m.

Teilaufgabe b)

(1) Zunächst ist der Schattenpunkt *T´* der Pyramidenspitze *T*(171|158|146) in der durch $z = 10$ definierten Ebene zu berechnen. Dazu ist in der Geradengleichung

$g:\ \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 171 \\ 158 \\ 146 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0{,}7154 \\ 0{,}3468 \\ -0{,}6065 \end{pmatrix}$ die *z*-Koordinate gleich 10 zu setzen. Dies ergibt

$\lambda \approx 224{,}24$ und damit den Schattenpunkt *T´* ≈ (10,6|235,8|10).

Dieser Punkt liegt 54,4 m westlich der 212 m langen Kante $\overline{EH}$, so dass die gesuchte Fläche ein Dreieck mit Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot 212\ \text{m} \cdot 54{,}4\ \text{m} = 5766{,}4\ \text{m}^2$ ist.

(2) Zu einem späteren Zeitpunkt wird die Sonne höher stehen, wodurch der Schattenpunkt *T´* auf den Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche zuwandert und auch in dieser Fläche liegen kann. Dann wirft die Pyramide keinen Schatten mehr auf der Ebene $z = 10$.

(3) Der Sonnenstrahl durch *T* folgt der durch zwei Punkte *T*, *T´´* definierten Geraden

$g:\ \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 171 \\ 158 \\ 146 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 333 \\ 301 \\ -146 \end{pmatrix}$. Anhand von Abb. 1 kann man aus der Lage des Punktes

T´´ und der Richtung von *g* schlussfolgern, dass der Schattenpunkt *T´* auf der Seitenfläche *ABS* liegen muss. Die zugehörige Ebene kann in der Form

$E:\ \vec{x}(\mu,\nu) = \begin{pmatrix} 391 \\ 410 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 225 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 112{,}5 \\ 112{,}5 \\ 139 \end{pmatrix}$ parametrisiert werden. Zur Berechnung des

Schnittpunktes von *g* und *E* stellt man ein lineares Gleichungssystem für $(\lambda \mid \mu \mid \nu)$ auf,

z. B. in Matrixform $\left(\begin{array}{ccc|c} 333 & 225 & 112{,}5 & 171-391 \\ 301 & 0 & 112{,}5 & 158-410 \\ -146 & 0 & 139 & 146 \end{array}\right)$. Dieses Gleichungssystem kann

z. B. mit Hilfe des *rref*-Befehls des GTR gelöst werden. Ergebnis:
$(\lambda \mid \mu \mid \nu) \approx (0{,}8831 \mid 0{,}2678 \mid 0{,}1228)$. Dies führt nach Einsetzen ungefähr zu
T´(465|424|17).

Teilaufgabe c)

(1) P liegt auf der Geraden QR und in der durch $z = 0$ definierten Ebene. Die Gerade QR und damit auch P liegen in der durch ABS definierten Ebene E. P liegt im Schnitt der Ebene E mit der durch $z = 0$ definierten Ebene, also auf der Geraden AB.

(2) Mit $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{r}$ werden die Ortsvektoren der Punkte A, P, R bezeichnet. Die möglichen Punkte P liegen auf dem Hilfsstrahl $g_{AB}: \vec{p}(\lambda) = \vec{a} - \lambda \overrightarrow{e_x}$ mit $\lambda \geq 0$. Die Steigung der zugehörigen Rampe wird durch die gegebene z-Koordinate h von R sowie die Länge $l(\lambda) = \left|\vec{r} - \vec{p}(\lambda)\right|$ der Rampe berechnet: $\sin(\alpha) = \dfrac{h}{l(\lambda)}$. Da der Steigungswinkel α gegeben ist, berechnet man zunächst $l(\lambda)$ und daraus den Wert von λ aus $l(\lambda) = \left|\vec{r} - \vec{p}(\lambda)\right| = \left|\vec{r} - \vec{a} + \lambda \overrightarrow{e_x}\right|$. Damit ist P durch $\vec{p}(\lambda)$ bestimmt.

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[1]	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt den Rechenweg.	4			
2	(2) berechnet den (Böschungs-)Winkel.	3			
3	(3) bestimmt die Länge der kürzesten Verbindung.	6			
sachlich richtige Alternativen: (13) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**13**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Größe der Schattenfläche.	6			
2	(2) erklärt, unter welchen Bedingungen kein Schatten entsteht.	3			
3	(3) nennt die Seitenfläche.	3			
4	(3) berechnet die Koordinaten des Schattenpunktes.	6			
sachlich richtige Alternativen: (18) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**18**			

[1] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, weshalb die Punkte *P*, *A*, *B* auf einer Geraden liegen.	3			
2	(2) ermittelt einen Lösungsplan und gibt die Gleichungen an.	6			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

	Summe insgesamt	**40**			

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan Beispielaufgabe

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

An der Salatbar einer Mensa wird bereits in Schälchen abgefüllter Salat angeboten. Laut Speiseplan soll eine Salatportion 100 g wiegen. Tatsächlich schwankt das Gewicht jedoch, da der Salat von Hand portioniert wird. Die erfahrenen Mitarbeiter haben aber ein Gefühl für die ungefähr richtige Menge, so dass bislang keine Beschwerden auftraten.

a) In der Küche werden 200 Salatportionen zubereitet. Dabei werden 600 Walnusskerne zugegeben und durch Mischen gut verteilt. Nach dem Abfüllen in die Schälchen werden die Salatportionen auf die Theke gestellt. Toni nimmt sich ein Schälchen von der Theke.

(1) *Begründen Sie, dass die Anzahl der Walnusskerne in Tonis Portion durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern n = 600 und p = 0,005 beschrieben werden kann, und berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.*

(2) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in Tonis Schälchen genau 4 Walnusskerne sind.*
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in Tonis Schälchen höchstens 2 Walnusskerne sind.

(3) Toni hat eine (nicht ganz korrekte) Faustregel für große Werte von n in Erinnerung, der zufolge $P(X \leq \mu) \approx 50\%$ gelten solle.
Erklären Sie anhand der Verteilung aus Abbildung 1 und der Kenngrößen μ und σ die Ursache für das Abweichen von der Faustregel.
Geben Sie eine Bedingung an, unter der die Faustregel besser gilt.

(5 + 4 + 6 Punkte)

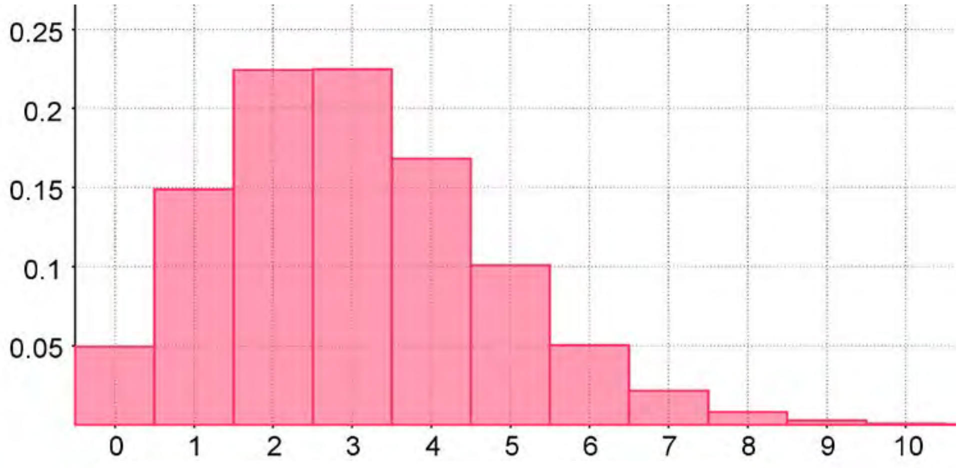


Abbildung 1

b) Die Mensaleitung sagt zu, dass Salatportionen jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 50 % ein Gewicht von über 100 g sowie ein Gewicht von unter 100 g haben können.

(1) Es wird vorausgesetzt, dass die Angabe der Mensaleitung zutrifft.
Bestimmen Sie, wie viele Portionen man mindestens testen muss, um mit 99 % Wahrscheinlichkeit eine Portion zu finden, die mindestens 100 g wiegt.

Bei einer Kontrolle durch eine Aufsichtsbehörde werden über einen längeren Zeitraum Stichproben genommen. Insgesamt werden 50 Portionen genau nachgewogen. Wenn mehr als 31 Portionen ein Gewicht von unter 100 g aufweisen, wird die Behörde die Größe der Salatportionen beanstanden.

(2) Erklären Sie, welches Interesse die Behörde mit dem Testverfahren verfolgt und welchen Fehler sie dabei vorrangig vermeiden möchte.

(3) Ermitteln Sie, welches der Signifikanzniveaus 10 %, 5 % oder 1 % dem Test zugrunde liegt.

Geben Sie dabei an, welche Modellannahmen Ihrer Rechnung zugrunde liegen.

(5 + 4 + 5 Punkte)

c) Das Gewicht *G* (gemessen in Gramm) einer Salatportion soll als normalverteilte Zufallsgröße angenommen werden. Um Beschwerden zu verhindern, gibt die Mensaleitung der Küche vor, dass Salatportionen mit weniger als 90 g Gewicht nur mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 1 % auftreten dürfen.

(1) Zeigen Sie, dass die Vorgabe der Mensaleitung für die Parameter $(\mu_1;\,\sigma_1) = (95;2{,}1)$ *und* $(\mu_2;\,\sigma_2) = (105{,}6;6{,}4)$ *von G eingehalten wird.*

(2) Ordnen Sie die beiden in Abbildung 2 dargestellten Verteilungen den in c) (1) genannten Fällen begründet zu. Interpretieren Sie die Unterschiede im Sachkontext.

(3) Es sei nun $\mu = 100$.
Bestimmen Sie den maximalen Wert für den Parameter σ, so dass Salatportionen mit weniger als 90 g Gewicht nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 1 % auftreten.

(3 + 5 + 3 Punkte)

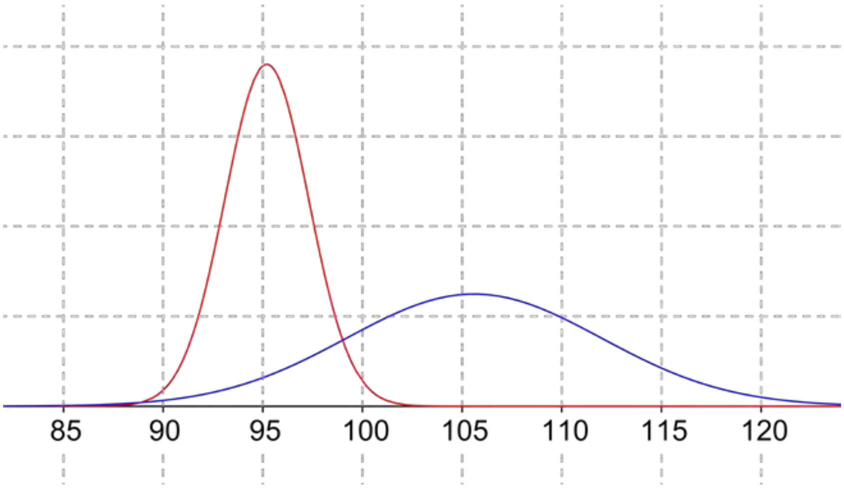


Abbildung 2

Zugelassene Hilfsmittel:

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung nach dem neuen Kernlehrplan
Beispielaufgabe

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung
   - Testen von Hypothesen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Grafikfähiger Taschenrechner
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Jeder der $n = 600$ Walnusskerne gelangt mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{200}$ in eine bestimmte unter den 200 Portionen, z. B. in Tonis. Hinter dem Modell einer Binomialverteilung stehen die Annahmen, dass alle Walnusskerne unabhängig, also ohne sich beim Mischen und Abfüllen z. B. durch Aneinanderhaften zu beeinflussen, und mit gleicher Wahrscheinlichkeit in eine der 200 Portionen gelangen können, in die die gesamte Salatmenge aufgeteilt wird. Die gesuchten Kenngrößen sind

$\mu = n \cdot p = \frac{600}{200}$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{600 \cdot \frac{1}{200} \cdot \frac{199}{200}} \approx 1{,}73.$

(2) $P(X = 4) \approx 0{,}168$ ermittelt mit *binomPdf* (600 | 0,005 | 4)

$P(X \leq 2) \approx 0{,}423$ ermittelt mit *binomCdf* (600 | 0,005 | 0 | 2)

(3) Die Regel ist wegen $P(X \leq 3) \approx 65\ \%$ erkennbar verletzt. Aus dem Histogramm (Abb. 1) der Verteilung erkennt man, dass das „Übergewicht“ von ca. 15 % auf der linken Seite von μ durch die größeren Abweichungen bis maximal $k - \mu = 600 - 3$ auf der rechten Seite ausgeglichen werden. Dies bedingt zugleich eine deutliche Abweichung von der Symmetrie bzgl. der Achse $k = \mu = 3$.

Für diese Symmetrie sind große Werte für n zwar notwendig, aber nicht hinreichend. Gebraucht wird ein genügend großes σ – üblicherweise soll $\sigma > 3$ gelten. Hier ist aber nur $\sigma \approx 1{,}73$.

Teilaufgabe b)

(1) Die Wahrscheinlichkeit beträgt jeweils 50 %, einen Salat mit mehr bzw. weniger als 100 g Gewicht zu nehmen.

Wenn *E* das Ereignis ist, unter *n* Portionen mindestens eine mit mindestens 100 g zu finden, so ist das Gegenereignis, *n* Mal in Folge eine Portion mit unter 100 g zu finden. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $1 - P(E) = 0,5^n$.

Aus der Bedingung $P(E) \geq 0,99$ folgt nun $1 - P(E) = 0,5^n \leq 0,01$.

Dies ist für $n \geq 7$ erfüllt. Man muss demnach mindestens 7 Portionen testen.

(2) Mit dem Testverfahren möchte die Behörde untersuchen, ob die Mensaleitung im Durchschnitt zu viele Salatportionen mit weniger als 100 g Salat ausgibt. Sie möchte vermeiden, die Mensaleitung zu Unrecht zu beschuldigen, also die Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Beanstandung begrenzen.

(3) Die Testgröße *Y* gibt die Anzahl der Portionen mit weniger als 100 g an. *Y* wird als binomialverteilt angenommen mit den Parametern *n* = 50 (Stichprobenumfang) und *p = 0,5*. Die Zusage der Mensaleitung wird für *Y* > 31 gemäß der vorgegebenen Entscheidungsregel abgelehnt.

Dies geschieht irrtümlich mit einer Wahrscheinlichkeit von
$P_{50;0,5}(Y > 31) \approx 0,032 < 5\%$, ermittelt mit $binomCdf(50 | 0,5 | 32 | 50)$. Wegen
$P_{50;0,5}(Y \geq 31) \approx 0,059 > 5\%$, ermittelt mit $binomCdf(50 | 0,5 | 31 | 50)$, hat die Behörde das Signifikanzniveau von 5 % gewählt.

Teilaufagbe c)

(1) $P_{95;2,1}(G \leq 90) \approx 0{,}0086 \leq 1\%$ ermittelt mit *normCdf* $(0\,|\,90\,|\,95\,|\,2{,}1)$
$P_{105;6,4}(G \leq 90) \approx 0{,}0095 \leq 1\%$ ermittelt mit *normCdf* $(0\,|\,90\,|\,105\,|\,6{,}4)$

(2) Die Graphen der Normalverteilungen lassen sich anhand der Extremstelle beim Erwartungswert μ_1 = 95 g (unter der Vorgabe von 100 g) bzw. μ_2 = 105 g (über der Vorgabe von 100 g) oder anhand der unterschiedlichen Streuung (geringer, d. h. schmalere höhere Form, bzw. größer, d. h. breitere flachere Form) unterscheiden.

Der Mensabesucher wird im ersten Fall (μ_1 = 95 g) systematisch mit im Schnitt um 5 g zu wenig Salat abgespeist. Es wird jedoch so präzise abgewogen, dass die Grenze von 10 g Mindergewicht nur mit Wahrscheinlichkeit von 1 % unterschritten wird. Im zweiten Fall (μ_2 = 105 g) wird auf genaues Abwiegen weniger Mühe verwandt. Um die gleiche Schranke von 1 % Wahrscheinlichkeit für mehr als 10 g Mindergewicht einzuhalten, wird großzügig ein Aufschlag von im Mittel 5 g gewährt.

(3) Geht man von $\mu = E(G) = 100$ aus, so lautet die Bedingung:
$P(G \leq 90) = P(G \leq \mu - t\sigma) = \Phi(-t) \leq 0{,}01$.

Dies ergibt mit dem zugehörigen Quantil t = 2,33, ermittelt mit der inversen Normalverteilung des GTR *invNorm* (0,01 | 0 | 1) oder durch systematisches Probieren, den Wert $\sigma = \frac{10}{t} = \frac{10}{2{,}33} \approx 4{,}3$. Die Bedingung ist wegen der monoton fallenden Funktion $t \mapsto \Phi(-t)$ auch für größere Werte von t, d. h. kleinere Werte für σ erfüllt.

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**[1]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass die Anzahl durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.	3			
2	(1) berechnet Erwartungswert und Standardabweichung.	2			
3	(2) berechnet die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	4			
4	(3) erklärt die Ursache für das Abweichen von der Faustregel.	4			
5	(3) gibt eine korrekte Bedingung an.	2			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**15**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Anzahl der zu testenden Portionen.	5			
2	(2) erklärt das Interesse der Behörde.	4			
3	(3) ermittelt das Signifikanzniveau des Tests und gibt die Modellannahmen an.	5			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**14**			

[1] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit maximal 1 % beträgt.	3			
2	(2) ordnet den Verteilungen begründet Parameter zu.	2			
3	(2) interpretiert die Unterschiede im Sachkontext.	3			
4	(3) bestimmt den maximalen Wert für die Streuung.	3			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

	Summe insgesamt	**40**			