Vergleichsklausur 2009 für die Jahrgangsstufe 11

Termin: 04.06.2009, 3. und 4. Stunde **Reine Arbeitszeit: 90 min**

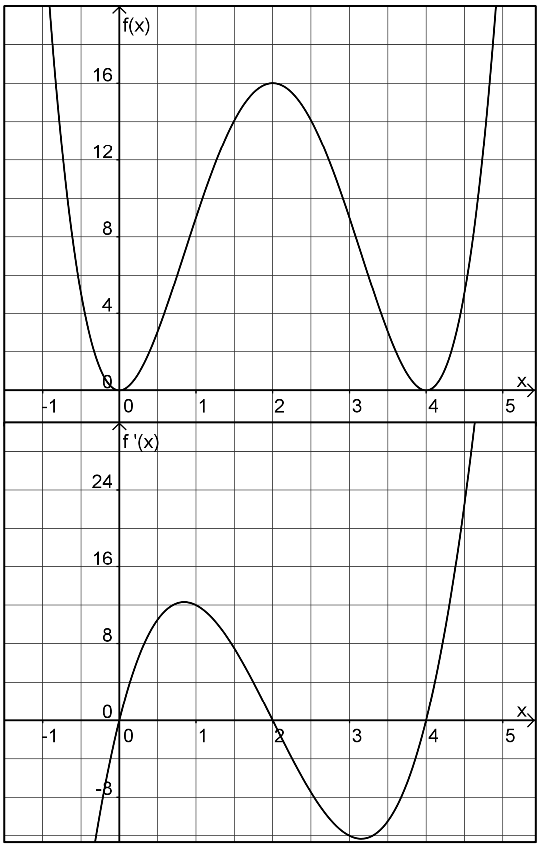
Die Schülerinnen und Schüler müssen drei Aufgaben bearbeiten.

Die 1. Aufgabe und 2. Aufgabe (Analysis) sind verpflichtende Aufgaben für alle Schülerinnen und Schüler.

Zusätzlich muss die Fachlehrerin / der Fachlehrer für ihren / seinen Kurs als 3. Aufgabe entweder die *Alternative Koordinatengeometrie* oder die *Alternative Beschreibende Statistik* zur Bearbeitung auswählen.

Aufgabe 1

Die folgenden Abbildungen zeigen den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$ und den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



a) *Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.*

b) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f in $T_1(0\,|\,0)$ und $T_2(4\,|\,0)$ Tiefpunkte und in $H(2\,|\,16)$ einen Hochpunkt hat.*

c) *Leiten Sie aus dem Graphen der Ableitungsfunktion f' eine Aussage über die Anzahl der Wendestellen von f her und lesen Sie diese Stellen näherungsweise am Graphen ab.*

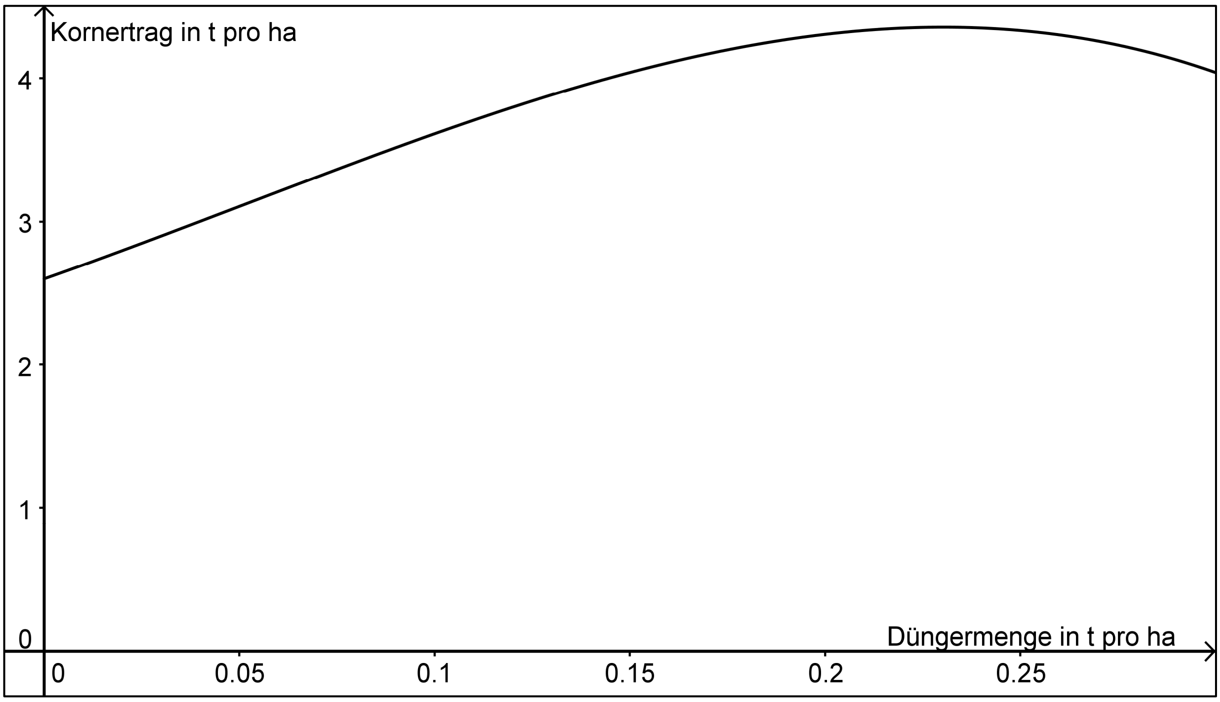
d) Betrachten Sie nun die Funktionen g_a mit $g_a(x) = x^2 \cdot (x^2 - 8x + a)$. Setzt man hier für a verschiedene Zahlen ein, so erhält man jedes Mal eine andere Funktionsgleichung.

d₁) *Bestimmen Sie die Zahl a so, dass die Funktion g_a mit der Funktion f übereinstimmt.*

d₂) *Ermitteln Sie a so, dass $x = 0$ eine Wendestelle des Graphen von g_a ist.*

Aufgabe 2

Wird Raps mit Stickstoff gedüngt, so nimmt der Kornertrag zunächst mit steigender Düngermenge zu. Wird die optimale Düngermenge überschritten, so wird der Ertrag wieder geringer. In dem folgenden Diagramm ist näherungsweise das Ergebnis von Versuchen dargestellt, die dazu in den Jahren 1998 bis 2005 in Hessen durchgeführt wurden.



Der abgebildete Graph gehört zur Funktion k mit

$$k(x) = -\tfrac{320}{3}x^3 + 16x^2 + \tfrac{48}{5}x + \tfrac{13}{5}.$$

Dabei bezeichnet x die Düngermenge in Tonnen pro Hektar und $k(x)$ den Kornertrag in Tonnen pro Hektar bei der Düngermenge x. Mit dieser Funktion ist es nun möglich, die folgenden Fragestellungen zu bearbeiten.

a) *Zeigen Sie rechnerisch, dass bei einer Düngermenge von annähernd 0,23 Tonnen pro Hektar der maximale Kornertrag erzielt wird.*

Berechnen Sie näherungsweise den maximalen Kornertrag pro Hektar.

b) *Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion k und die Steigung an der Wendestelle.*

Interpretieren Sie die berechneten Werte im Sachzusammenhang.

c) *Entscheiden Sie begründet, ob die Funktion k auch außerhalb des in der Abbildung dargestellten Bereiches immer eine sinnvolle Beschreibung des Zusammenhangs von Düngermenge und Kornertrag liefert.*

d) Ein Landwirt erzielt pro Tonne Raps einen Verkaufspreis von 225 €, die Kosten pro Tonne Stickstoffdünger betragen 500 €.

Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion g, die den Gewinn pro Hektar in Abhängigkeit von der aufgebrachten Düngermenge pro Hektar beschreibt.

Weitere Betriebskosten sollen dabei unberücksichtigt bleiben.

Aufgabe 3 (Alternative Koordinatengeometrie)

Die Punkte $A(0|4)$, $B(0|-4)$ und $C(6|-4)$ sind die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks.

a) *Zeichnen Sie das Dreieck ABC und den Punkt* $M(3|0)$ *in ein Koordinatensystem.*

Begründen Sie, dass M der Mittelpunkt des Umkreises k des Dreiecks ABC ist.

Zeichnen Sie den Umkreis und bestimmen Sie eine Gleichung von k.

b) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden* g_1 *durch die Punkte A und C.*

Bestimmen Sie den Schnittpunkt F der Geraden g_1 *mit ihrer Orthogonalen* g_2*, die durch B verläuft.*

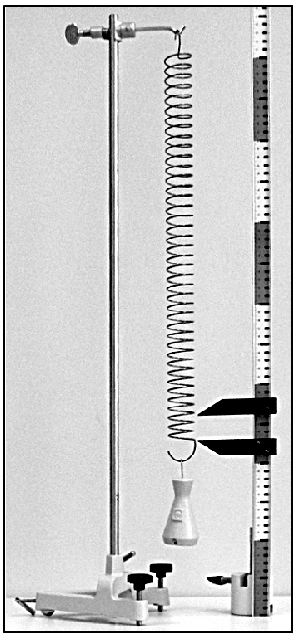
c) Der Punkt *D* entsteht durch Spiegelung von *B* an der Geraden g_1.

Konstruieren Sie in Ihrer Zeichnung aus Teilaufgabe a) diesen Punkt D und begründen Sie, dass D auf dem Kreis k liegt.

Beschreiben Sie kurz, wie man die Koordinaten von D berechnen kann.

Die konkrete Durchführung der Rechnung ist hier nicht erforderlich.

Aufgabe 3 (Alternative Beschreibende Statistik)



In einem Experiment (siehe Abb. rechts) wird von einer Schülergruppe die Verlängerung einer Feder bei Belastung durch ein Gewicht untersucht. Die Messung liefert die folgenden Daten:

Masse in g	Verlängerung in cm
40	1,4
80	2,1
120	3,3
160	4,4

a) *Berechnen Sie den Datenschwerpunkt.*

Stellen Sie den Datenschwerpunkt und die Wertepaare aus der obigen Tabelle in einem geeignet gewählten Koordinatensystem dar.

b) Einer der Schüler ermittelt mit einem Tabellenkalkulationsprogramm die folgende Gleichung für die Regressionsgerade des Datensatzes:

$$y = 0{,}0255x + 0{,}2500$$

Berechnen Sie mit dieser Gleichung einen Schätzwert für die Federverlängerung bei einer Masse von 150 g.

Zeichnen Sie die Regressionsgerade in Ihr Koordinatensystem aus a) ein.

c) Eine Schülerin ist der Meinung, dass eine Schätzfunktion der Form $y = m \cdot x + b$ mit $b = 0{,}2500$ für die Schätzung der Federverlängerung bei Belastung nicht angemessen ist. Sie schlägt vielmehr vor, eine Schätzgerade mit $y = m \cdot x$ zu bestimmen, die nicht durch den Datenschwerpunkt, sondern durch den Koordinatenursprung $O(0|0)$ verläuft.

Erklären Sie, welche Überlegung die Schülerin dazu veranlasst haben könnte.

d) Zur Bestimmung der Steigung m der Ursprungsgeraden wird der folgende Term $S(m)$ aufgestellt:

$$S(m) = (m \cdot 40 - 1{,}4)^2 + (m \cdot 80 - 2{,}1)^2 + (m \cdot 120 - 3{,}3)^2 + (m \cdot 160 - 4{,}4)^2$$

Erklären Sie die Bedeutung dieses Terms.

e) Nach Umformung ergibt sich daraus

$$S(m) = 48\,000 \cdot m^2 - 2\,648 \cdot m + 36{,}62$$

Bestimmen Sie den Tiefpunkt der zugehörigen Parabel.

Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.