Vergleichsarbeit Analysis Stufe 11

im 2. Halbjahr des Schuljahres 1999/2000

Lösung

Allgemeine Vorbemerkung:

Die Darstellung der algebraischen Umformungen ist an mehreren Stellen sehr gedrängt, um Kopierkosten zu sparen. Aus demselben Grund sind die Zeichnungen zu den Aufgaben zusammengefasst.

Leider konnten die Lösungen bereits vom Quellserver (BezReg Düsseldorf) nur sehr fehlerhaft geladen werden. In nächster Zeit wird hier eine überarbeitete Fassung veröffentlicht!
webmaster@ziemke-koeln.de

Aufgabe 1:

a. f >Â;(x) = 2ax + b.
Es gilt:
f(3)= 3 ∧ f >Â;(3) = -2 ⇔ 9a + 3b = 3 ∧ 6a + b= -2 ⇔ 3a + b = 1 ∧ 6a + b= -2
⇔ 3a = -3 ∧ 6a + b = -2 ⇔ a = -1 ∧ -6 + b = -2 ⇔ a = -1 ∧ b = 4
Die gesuchte Funktion f ist also gegeben durch f(x) = $-x^2$ + 4x.
b. Es gilt f >Â;(x) = -2x + 4. Es ist allgemein t(x) = f >Â;(x_0)(x - x_0) + f(x_0), also ergibt sich hier: t(x) = 2(x-1) + 3 = 2x + 1. Für den Steigungswinkel α der Tangente gilt:
tan(α) = f >Â;(1) = 2, also α = 63,4349..°.
c. Die gesuchte Normale n hat die Steigung -0,5. Sie verläuft durch (1; 3).
Also gilt: n(x) = -0,5(x-1) + 3 = -0,5x + 3,5. Geforderte Zeichnung siehe unten.
d. Das Dreieck hat einen Inhalt von 0,5• (3,5-1)• 1 FE = 1,25 FE.
e. Ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen einer Wendestelle von g an einer Stelle x_w ist:
g >Â;□>Â;(x_w)=0.
Rechnung: g >Â;□>Â;(x) = 0 ⇔ f >Â;(x) = 0 ⇔ -2x + 4 = 0 ⇔ x = 2
Allenfalls bei x = 2 kann also eine Wendestelle vorliegen.

Ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen einer Wendestelle von g an einer Stelle x_w ist:
g >Â;□>Â;(x_w) = 0 ∧ g >Â;□>Â;□>Â;(x_w) ≠ 0. Rechnung: g >Â;□>Â;□>Â;(2) =
f >Â;□>Â;(2) = -2 < 0
x= 2 ist also die einzige Wendestelle von g.

(Selbstverständlich kann hier auch mit dem Scheitelpunkt der Parabel f argumentiert werden.)

Aufgabe 2:

a. Skizze siehe unten
b. Der gesuchte Bereich ist der zwischen den Nullstellen von f. Es gilt:
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 24x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(-x+12) = 0 \Leftrightarrow x=0$ oder $-x + 12 = 0$.
   Der gesuchte Bereich ist das abgeschlossene Intervall [0; 12].
c. Ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums an einer Stelle x_E ist: f
   f ‘’ $(x_E) = 0$.
   Rechnung:
   f >Â;(x) = 0 $\Leftrightarrow -6x^2 + 48x = 0 \Leftrightarrow -6x(x-8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$

   Ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums an einer Stelle x_E ist:
   f ’ $(x_E) = 0 \wedge$ f ‘’ $(x_E) \neq 0$.
   Rechnung: f ’’ (x) = -12x + 48 $\Rightarrow$ f ’’ (8) = -48 < 0
   An der Stelle $x_E = 8$ liegt ein lokales Maximum vom Wert f(8) = 512 vor.

   Da die Funktion f an den Rändern des Intervalls [0; 12] jeweils den Funktionswert 0 hat, handelt es sich bezogen auf diesen Bereich um ein <u>absolutes</u> Maximum.
d. Die mittlere Änderungsrate von f über einem Intervall [a; b] $\subseteq$ [0 ; 12],
   also der Term (f(b)-f(a)) / (b-a), beschreibt in diesem Zusammenhang die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der die Wassermenge in der Zeit von a bis b zunimmt / abnimmt.
   Die lokale Änderungsrate , also der Wert f □>Â;(x_0), beschreibt hier die Momentangeschwindigkeit, mit der die Wassermenge zum Zeitpunkt x_0 zunimmt / abnimmt.
e. Ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines Wendepunktes an einer Stelle x_W ist: f
   >Â;□>Â;(x_W) = 0.
   Rechnung:
   f >Â;□>Â;(x) = 0 $\Leftrightarrow -12x+48 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

   Ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines Wendepunktes an einer Stelle x_W ist: f
   >Â;□>Â;(x_W) = 0 $\wedge$ f >Â;□>Â;□>Â;(x_W) $\neq$ 0.
   Rechnung: f >Â;□>Â;□>Â;(x) = -12 $\Rightarrow$ f >Â;□>Â;□>Â;(4) = -12 $\neq$ 0
   An der Stelle $x_W = 4$ liegt ein Wendepunkt vor.

   Es handelt sich um den Punkt (4; f(4)) = (4; 256)
f. Die Wendestelle ist in diesem Zusammenhang derjenige Zeitpunkt, an welchem die Wassermenge im Pumpspeicherwerk mit der größten Geschwindigkeit zunimmt / abnimmt.

Aufgabe 3:

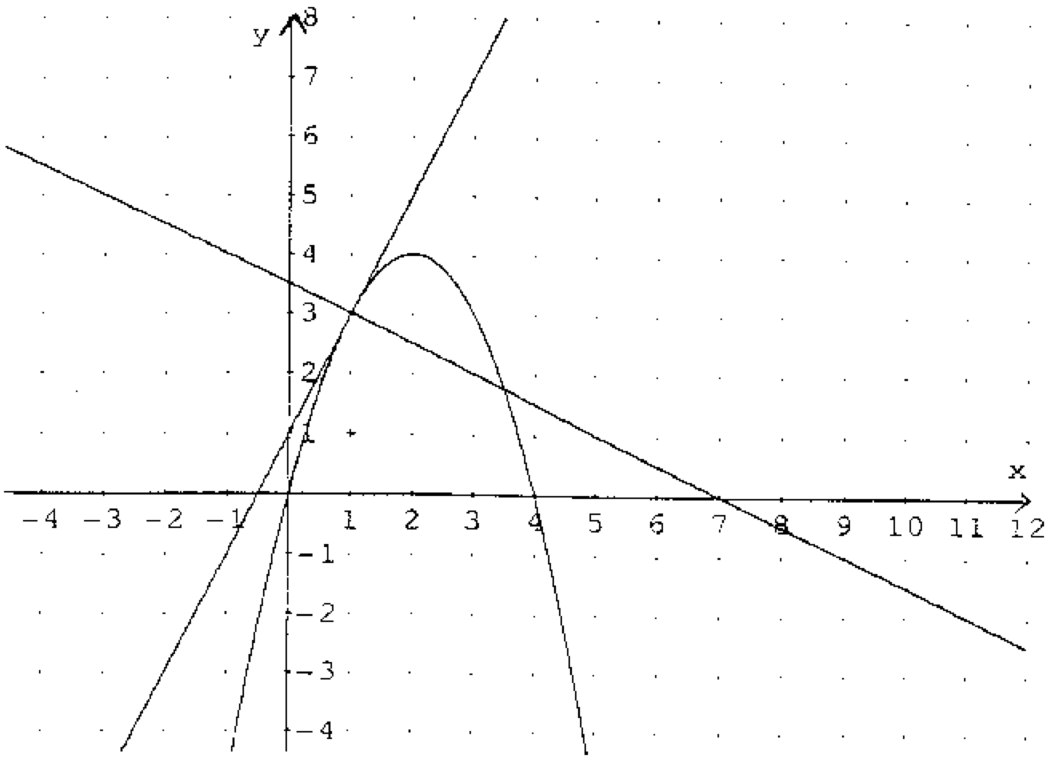
a. Unter der Tangente an den Graphen einer in x_0 differenzierbaren Funktion f an der Stelle x_0 versteht man die Gerade, die durch den Punkt $(x_0; f(x_0))$ verläuft und die Steigung f□>Â;(x_0) hat.

b. $f(x)= x^3 - x^2 + 2 \Rightarrow$ f´□>Â;$(x) = 3x^2 - 2x$
Die Tangentengleichung ist: t(x) = f   >Â;(3)(x - 3) + 20 = 21x - 43
Berechnung der gemeinsamen Punkte von Funktionsgraph und Tangente:
$f(x) = t(x) \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2 = 21x - 43 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+2x-15) = 0 \Leftrightarrow (x-3)\,(x-3)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -5$
Die gemeinsamen Punkte sind der Berührpunkt (3;20) sowie der Punkt (-5; -148).

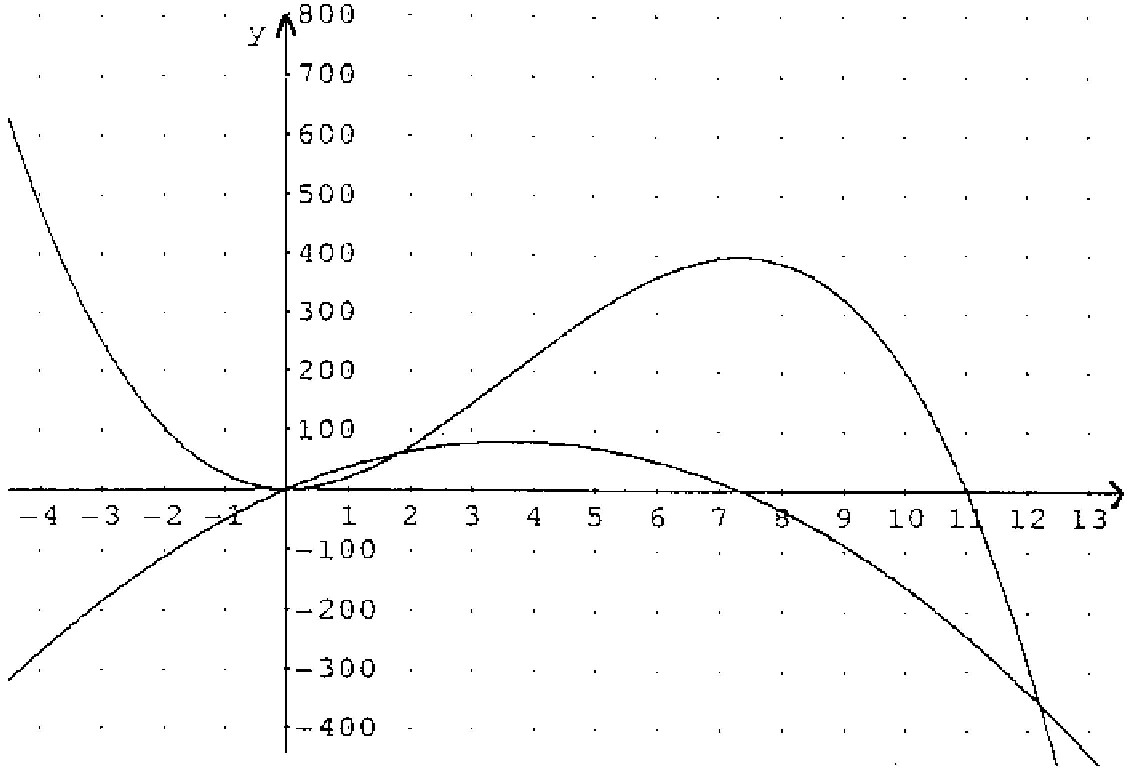
c. $f(x) = ax^2 \Rightarrow$ f´□>Â;$(x) = 2ax$
Die Tangentengleichung für die Stelle 2 ist $t(x) = 4a(x - 2) + 4a = 4ax - 4a$.
Es ist $f(x) = t(x) \Leftrightarrow ax^2 - 4ax - 4a = 0 \Leftrightarrow a(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (da $a \neq 0$)

d. Es ist $P = (p;p^2)$.
Es ist also $Q=(0;p^2)$. Dann hat nach Konstruktion der Punkt R die Koordinaten $(0;-p^2)$.
Die Tangente an den Graphen von f in P hat die Gleichung
$t(x) = 2p(x - p) + p^2 = 2px - 2p^2 + p^2 = 2px - p^2$.
Ihr Schnittpunkt mit der y-Achse ist offenbar der Punkt R. Zeichnung hierzu siehe unten.

Zeichnung zur Aufgabe 1c):



Zeichnung zur Aufgabe 2a):



Zeichnung zur Aufgabe 3d):