Lösungen

Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Nr.		Punkte
1a	Einsetzen liefert $f(6) = 12{,}48$; $f(21) = 19{,}23$. Um 6 Uhr beträgt die Temperatur etwa 12,5 °C, um 21 Uhr 19,2 °C.	2
	Gesucht ist das Maximum von f. Mit der notwendigen Bedingung $f'(t) = 0$ folgt: $-0{,}03t^2 + 0{,}48t = 0 \Leftrightarrow t\left(-0{,}03t + 0{,}48\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 16$.	4
	Da $t = 0$ offensichtlich nicht die gesuchte Stelle ist, wird $t = 16$ als Nullstelle von f' mit f'' geprüft: $f''(16) = -0{,}48 < 0$, also ist $t = 16$ die gesuchte Maximalstelle.	2
	Für das gesuchte Maximum gilt: $f(16) = 26{,}48$. Der Tageshöchstwert wird um 16 Uhr erreicht, er beträgt etwa 26,5 °C, es handelt sich also um einen Sommertag.	2
1b	$f'(t) = -0{,}03t^2 + 0{,}48t$. Damit ergibt sich für die Steigung der Wendetangente $f'(8) = 1{,}92$.	2
	An der Stelle 8 ist die lokale Änderungsrate maximal, d. h. um 8 Uhr morgens ist der Temperaturanstieg mit ca. 2 °C pro Stunde maximal.	2
1c	Zeichnen der Geraden zu $y = 20$ führt näherungsweise zu den Schnittstellen $t_1 \approx 10$ und $t_2 \approx 20{,}5$. Da der Graph in diesem Bereich oberhalb der o. g. Geraden verläuft, liegt der gesuchte Zeitraum ungefähr zwischen 10 Uhr und 20.30 Uhr.	2
	Auf Grund der Angabe aus dem Aufgabentext ergibt sich $t_1 = 10$ als eine der gesuchten Lösungen der Gleichung. Mit Polynomdivision erhält man $\left(t^3 - 24t^2 + 1400\right) : \left(t - 10\right) = t^2 - 14t - 140$.	4
	Die Lösung der quadratischen Gleichung führt zu $t_2 = 7 - \sqrt{189}$ und $t_3 = 7 + \sqrt{189} \approx 20{,}75$.	2
	Für den gesuchten Zeitraum führen nur die Lösungen t_1 und t_3 zu sinnvollen Ergebnissen. Zwischen 10 Uhr und ungefähr 20.45 Uhr liegt die Temperatur bei mindestens 20 °C.	2
	Summe:	**24**

Nr.		Punkte
2a	$f'(x) = x^2 - 6x + 8 \qquad f''(x) = 2x - 6$ $f'(2) = 0 \wedge f''(2) = -2 < 0,\ f(2) = \frac{4}{3}$ $f'(4) = 0 \wedge f''(4) = 2 > 0,\ f(4) = 0$ Damit ergeben sich der Hochpunkt $H\left(2 \mid \frac{4}{3}\right)$ und der Tiefpunkt $T\left(4 \mid 0\right)$.	8
2b	$f''(x) = 0 \iff 2x - 6 = 0 \iff x = 3$ Wegen $f'''(x) = 2$ ist $f'''(3) \neq 0$. Damit erhält man den Wendepunkt $W\left(3 \mid \frac{2}{3}\right)$.	4
2c	Graph A hat an der Stelle 4 eine positive Steigung, der Graph der Ableitungsfunktion müsste hier einen positiven Funktionswert haben. Graph A kommt daher nicht in Frage. Graph D hat an der Stelle 1 einen Hochpunkt, der Graph der Ableitungsfunktion müsste hier eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von + nach – haben. Graph D kommt daher nicht in Frage. Andere Begründungen sind denkbar. Bei den Graphen B und C kann es sich jeweils um einen passenden Graphen handeln. (Diese Angabe muss hier nicht explizit erfolgen.)	6
2d	Möglichkeit 1 (Berechnung der Schnittstellen): $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - \frac{16}{3} = \frac{5}{4}x - \frac{16}{3} \iff x \cdot \left(x^2 - 9x + \frac{81}{4}\right) = 0 \iff x = 0 \vee x = \frac{9}{2}$ Wegen $f'\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{5}{4}$ stimmt die Steigung des Graphen von f an der Stelle $\frac{9}{2}$ mit der Steigung der Geraden überein, es handelt sich also um eine Tangentengleichung. Möglichkeit 2 (Berechnung der Stellen mit der Steigung $\frac{5}{4}$): $x^2 - 6x + 8 = \frac{5}{4} \iff x = \frac{3}{2} \vee x = \frac{9}{2}$ Wegen $f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{24} = t\left(\frac{9}{2}\right)$ stimmen auch die Funktionswerte von f und t an der Stelle $\frac{9}{2}$ überein, es handelt sich also um eine Tangentengleichung.	6
	Summe:	**24**

Nr.		Punkte
3a	Mit dem Mittelpunkt $\mathrm{D}(0\mid 0)$ und $r^2 = \left\lvert\overline{\mathrm{DC}}\right\rvert^2 = 20$ ergibt sich $\mathrm{k}_1 : x^2 + y^2 = 20$.	2
	Das Sehnendreieck ABC ist rechtwinklig, da die Steigungen $m_g = -\frac{1}{3}$ von $g(\mathrm{A};\mathrm{C})$ und $m_h = 3$ von $h(\mathrm{B};\mathrm{C})$ den Produktwert -1 besitzen. Andere Möglichkeiten: Da $\overline{\mathrm{AB}}$ der Durchmesser des Kreises ist, ist ABC nach dem Satz des Thales ein rechtwinkliges Dreieck. Wegen $a^2 + b^2 = c^2$ ist ABC nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras ein rechtwinkliges Dreieck.	3
3b	Bestimmung der Mittelsenkrechten: $\mathrm{M_b}\left(\frac{1}{2}\cdot(-2+4)\mid\frac{1}{2}\cdot(4+2)\right) = \mathrm{M_b}(1\mid 3)$ Die Steigung der Mittelsenkrechten $\mathrm{m_b}$ ist $\frac{-1}{m_g} = 3$. Einsetzen der Koordinaten von $\mathrm{M_b}$ ergibt mit $3 = 3\cdot 1 + n \Leftrightarrow n = 0$ die Gleichung $y = 3x$ der Mittelsenkrechten $\mathrm{m_b}$. Andere Möglichkeit: Die Koordinaten von $\mathrm{M_b}$ und die Gleichung von $\mathrm{m_b}$ werden zeichnerisch ermittelt. Die Ergebnisse werden anschließend rechnerisch bestätigt.	4
	Begründung zum Schnittpunkt D: Da D der Mittelpunkt von $\overline{\mathrm{AB}}$ ist und damit auf der Mittelsenkrechten $\mathrm{m_c}$ liegt und die Mittelsenkrechte $\mathrm{m_b}$ eine Ursprungsgerade ist, schneiden sich $\mathrm{m_c}$ und $\mathrm{m_b}$ in $\mathrm{D}(0\mid 0)$. Da sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, verläuft auch $\mathrm{m_a}$ durch diesen Punkt. Andere Möglichkeit zur Begründung, dass $\mathrm{m_a}$ durch D verläuft: Die Gleichung von $\mathrm{m_a}$ wird bestimmt, auch $\mathrm{m_a}$ ist eine Ursprungsgerade.	4

3c	k_2 ist der Umkreis des Dreiecks DCM_b. Der Umkreismittelpunkt E ist der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks. Die Gerade durch D und C hat die Steigung $\frac{1}{2}$, die Steigung der Mittelsenkrechten von $\overline{DC}$ beträgt daher $\frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$. Da die Mittelsenkrechte durch den Mittelpunkt $M_{\overline{DC}}(2\|1)$ von $\overline{DC}$ verläuft, gilt $1 = -2 \cdot 2 + n \Leftrightarrow n = 5$. Die Gleichung dieser Mittelsenkrechten ist daher $y = -2x + 5$. Analog erhält man für die Mittelsenkrechte der Dreiecksseite $\overline{DM_b}$ die Gleichung $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. Für den x-Wert des Kreismittelpunktes E gilt $-2x + 5 = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = 2$, also $E(2\|1)$. Der Radius r_2 ergibt sich aus $r_2 = \|\overline{DE}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Damit gilt $k_2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$. Andere Möglichkeit zur Bestimmung des Kreismittelpunktes: Das Dreieck DCM_b ist rechtwinklig bei M_b. k_2 ist der Thaleskreis dieses Dreiecks. Daher ist der Mittelpunkt E der Strecke $\overline{DC}$ der Mittelpunkt von k_2.	4 2 2
3d	Wegen $r_1 = 2 \cdot r_2$ folgt $A(k_1) = 4 \cdot A(k_2) \Leftrightarrow \frac{A(k_1)}{A(k_2)} = 4$.	3
	Summe:	**24**

<table>
<tr><th>Nr.</th><th></th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td>4a</td><td>Berechnung des Datenschwerpunktes:
$\overline{x} = \frac{0,282+6,6+46,4+70}{4} = 30,8205$ und $\overline{y} = \frac{118+1204+5251+6912}{4} = 3371,25$
Also ist der Datenschwerpunkt $D\left(30,8205 \mid 3371,25\right)$.

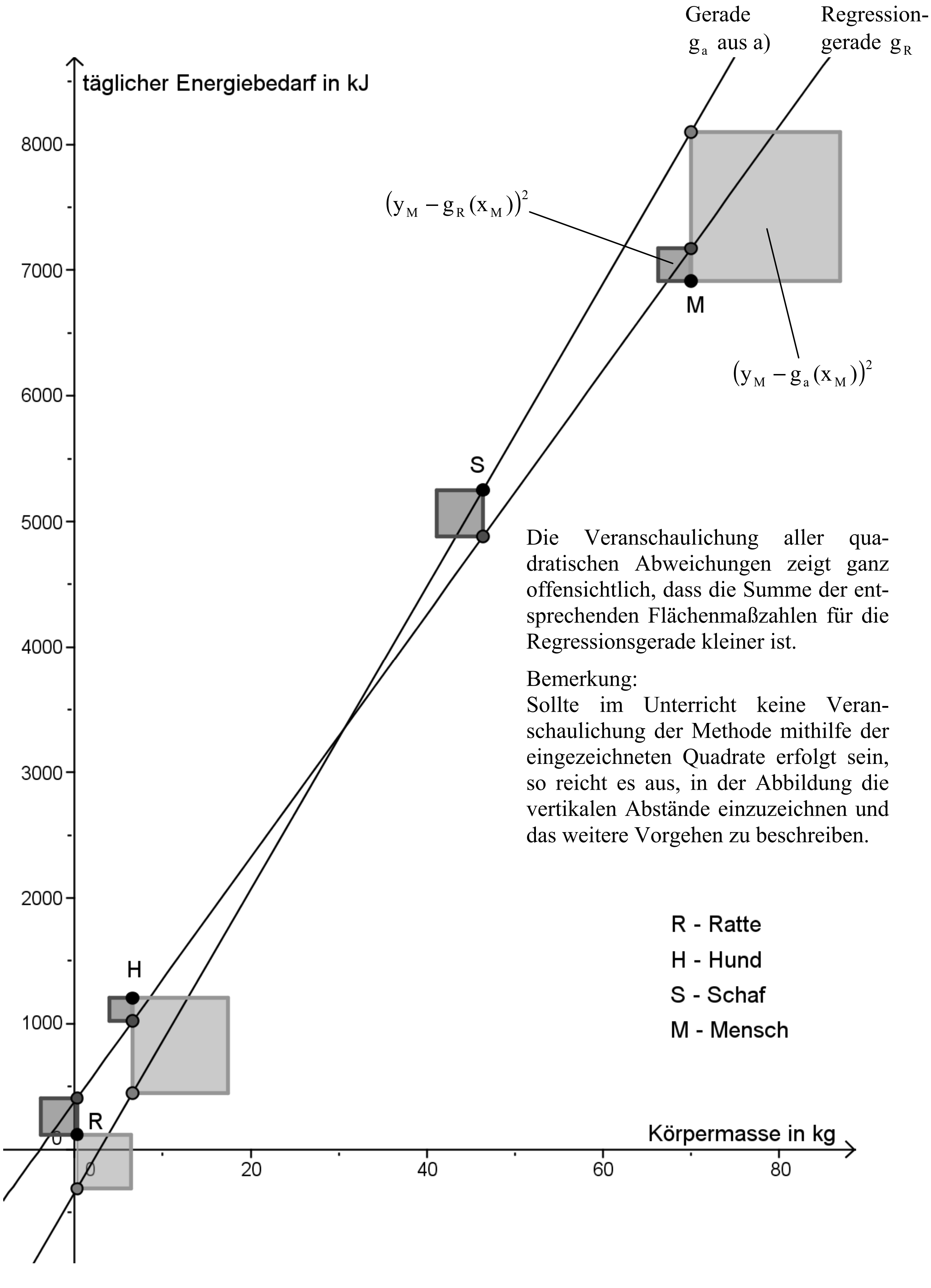
Gerade durch die Punkte $D\left(30,8205 \mid 3371,25\right)$ und $S\left(46,4 \mid 5251\right)$:
$m = \frac{5251-3371,25}{46,4-30,8205} \approx 120,66$ und $n \approx 5251 - 120,66 \cdot 46,4 \approx -347,41$
Es ergibt sich gerundet die Geradengleichung $y = 120,66x - 347,41$.</td><td>3

4</td></tr>
<tr><td>4b</td><td>Bei der Methode der kleinsten Quadrate bildet man die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände der Datenpunkte von der entsprechenden Gerade. Die Geradengleichung, für die diese Summe kleiner ist, beschreibt den Zusammenhang zwischen den quantitativen Daten (in diesem Fall zwischen Masse und Energiebedarf) besser. Die Regressionsgerade ist die Gerade, für die diese Summe minimal ist.

Zur Veranschaulichung des Sachverhaltes siehe die Anlage zur Lösung von 4).</td><td>8</td></tr>
<tr><td>4c</td><td>Man wählt zur Ermittlung des benötigten Energiebedarfs die Gleichung zur Regressionsgeraden aus Aufgabenteil b):
$y = 97,01 \cdot 38 + 381,25 = 4067,63$

Ermittlung der Bananenanzahl: 4067,63 : 456 $\approx$ 8,9
Der Affe benötigt etwa 9 Bananen, um seinen täglichen Energiebedarf abzudecken.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4d</td><td>Berechnung der Funktionswerte beider Gleichungen:
<table>
<tr><th></th><th>$\mathbf{y = 97,01 \cdot x + 381,25}$</th><th>$\mathbf{y = 286 \cdot x^{0,75}}$</th></tr>
<tr><td>Maus</td><td>≈ 383</td><td>≈ 16</td></tr>
<tr><td>Katze</td><td>≈ 672</td><td>≈ 652</td></tr>
<tr><td>Kuh</td><td>≈ 58587</td><td>≈ 34672</td></tr>
<tr><td>Elefant</td><td>≈ 339916</td><td>≈ 130142</td></tr>
</table>
Sowohl für sehr kleine x-Werte (z.B. Masse der Maus) als auch für große x-Werte sind die Abweichungen der mithilfe der Gleichung der Regressionsgeraden berechneten Werte wesentlich größer als bei der Gleichung nach Kleiber. Beispielsweise beträgt die Abweichung beim Elefanten bei der Geradengleichung mehr als 170 %, wohingegen der Wert bei der Gleichung nach Kleiber nur um weniger als 4 % abweicht.</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe:</td><td>24</td></tr>
</table>

Anlage zur Lösung von Aufgabe 4



Die Veranschaulichung aller quadratischen Abweichungen zeigt ganz offensichtlich, dass die Summe der entsprechenden Flächenmaßzahlen für die Regressionsgerade kleiner ist.

Bemerkung:
Sollte im Unterricht keine Veranschaulichung der Methode mithilfe der eingezeichneten Quadrate erfolgt sein, so reicht es aus, in der Abbildung die vertikalen Abstände einzuzeichnen und das weitere Vorgehen zu beschreiben.