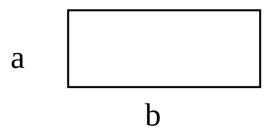
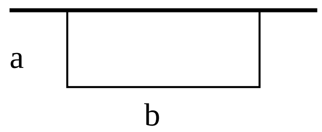
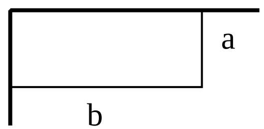
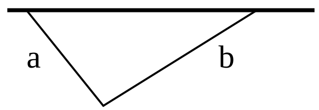
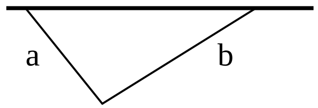
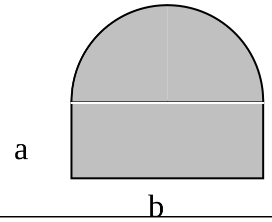
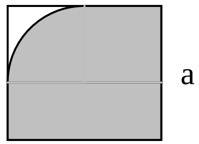
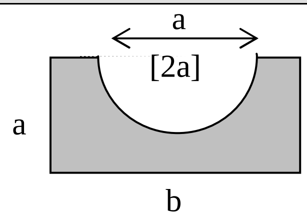
Übersicht zur Bearbeitung von Extremwertaufgaben

Aufgabe: Zum vorgegebenen Umfang U=20 [bzw. U*=20] sollen rechteckige [dreieckige] Flächen so bestimmt werden, dass deren Inhalt maximal ist.

Problem	4 Seiten eines Rechtecks	3 Seiten eines Rechtecks	2 Seiten eines Rechtecks	2 Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks
Skizze				 Winkel (b;a)=90°
Extremalbedingung	$A = a \cdot b$	$A = a \cdot b$	$A = a \cdot b$	$A = \frac{1}{2} a \cdot b$
Nebenbedingung	$U = 2a + 2b = 20$ $\Rightarrow b = 10 - a$	$U^* = 2a + b = 20$ $\Rightarrow b = 20 - 2a$	$U^* = a + b = 20$ $\Rightarrow b = 20 - a$	$U^* = a + b = 20$ $\Rightarrow b = 20 - a$
Zielfunktion	$A(a) = a(10 - a)$ $= -a^2 + 10a$	$A(a) = a(20 - 2a)$ $= -2a^2 + 20a$	$A(a) = a(20 - a)$ $= -a^2 + 20a$	$A(a) = \frac{1}{2} a(20 - a)$ $= -\frac{1}{2} a^2 + 10a$
Def.bereich	$D_A = [0;10]$	$D_A = [0;10]$	$D_A = [0;20]$	$D_A = [0;20]$
Ableitungen	$A'(a) = -2a + 10$ $A''(a) = -2$	$A'(a) = -4a + 20$ $A''(a) = -4$	$A'(a) = -2a + 20$ $A''(a) = -2$	$A'(a) = -a + 10$ $A''(a) = -1$
Extremstellen	$A'(a) = 0 \Rightarrow a = 5$ $A''(5) = -2 < 0 \Rightarrow Max$	$A'(a) = 0 \Rightarrow a = 5$ $A''(5) = -4 < 0 \Rightarrow Max$	$A'(a) = 0 \Rightarrow a = 10$ $A''(10) = -2 < 0 \Rightarrow Max$	$A'(a) = 0 \Rightarrow a = 10$ $A''(10) = -1 < 0 \Rightarrow Max$
weitere Parameter	$b = 10 - 5 = 5$ $A(5) = -25 + 50 = 25$	$b = 20 - 10 = 10$ $A(5) = -50 + 100 = 50$	$b = 20 - 10 = 10$ $A(10) = -100 + 200 = 100$	$b = 20 - 10 = 10$ $A(10) = -\frac{1}{2} \cdot 100 + 100 = 50$
Randextrema	keine, da $A(0) = 0 < A(5)$ $A(10) = 0 < A(5)$	keine, da $A(0) = 0 < A(5)$ $A(10) = 0 < A(5)$	keine, da $A(0) = 0 < A(10)$ $A(20) = 0 < A(10)$	keine, da $A(0) = 0 < A(10)$ $A(20) = 0 < A(10)$
Antwort	Das gesuchte Rechteck ist ein Quadrat mit Seitenlänge a=5 und Inhalt A=25.	Das gesuchte Rechteck hat die Seitenlängen a=5 und b=10 und den Inhalt A=50.	Das gesuchte Rechteck ist ein Quadrat mit Seitenlänge a=10 und Inhalt A=100.	Das gesuchte Dreieck ist gleichschenklig mit Seitenlänge a=b=10 und Inhalt A=50.

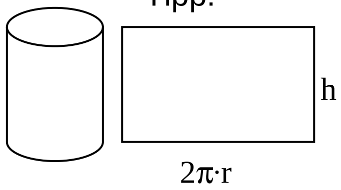
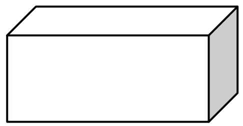
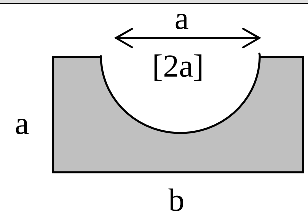
Arbeitsblatt 1 zu Extremwertaufgaben

Aufgabe: Zur Vorgabe (z. B. Umfang U=20 [bzw. U*=20]) sollen Flächen so bestimmt werden, dass deren Inhalt maximal ist.
(Hinweis: Kreisumfang= $2\pi \cdot r$; Kreisfläche= $\pi \cdot r^2$; machen Sie zur Probe Überschlagsrechnungen!)

Vorgabe	Umfang U*=20 sind 2 Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks	Umfang U=20 bildet Halbkreis und Rechteck	Umfang U=20 bildet Quadrat ohne Viertelsichel	Umfang U=20 bildet Rechteck ohne Halbkreis
Skizze	 Winkel (b;a)=90°			
Extremalbedingung				
Nebenbedingung		$\Rightarrow a = 10 - \frac{1}{2} b - \frac{1}{4} \pi \cdot b$	$U = 2a + a + \frac{1}{4} \pi \cdot a = 20$	
Zielfunktion		$A(b) = \ldots$		
Def.bereich				
Ableitungen				$A'(a) = -2\pi \cdot a + 10$ $[A'(a) = -(1+\frac{3}{4}\pi) \cdot a + 10]$
Extremstellen				
weitere Parameter				
Randextrema				
Antwort				

Arbeitsblatt 2 zu Extremwertaufgaben

Aufgabe: Zur Vorgabe (z. B. Umfang U=20, V = 0,33) sollen Flächen [Körper] mit extremaler Zieleigenschaft bestimmt werden.
(Hinweis: Kreisumfang=$2\pi \cdot r$; Kreisfläche=$\pi \cdot r^2$; machen Sie zur Probe Überschlagsrechnungen!)

Vorgabe	Inhalt V=0,33 eines Zylinders	auf Fläche mit A=620 wird Schnittbogen konstruiert		Fläche A=200 eines Rechtecks ohne Halbkreis
Ziel	Zylinder (r; h) inkl. Deckel und Boden mit minimaler Oberfläche O	Quader (a; b; c) ohne [mit] Oberseite mit maximalem Volumen		Figur mit minimalem [maximalem] Umfang
Skizze	Tipp: 			
Extremalbedingung				
Nebenbedingung				
Zielfunktion				
Def.bereich				
Ableitungen				
Extremstellen				
weitere Parameter				
Randextrema				
Antwort				