Extremwertaufgaben VII

1. Wir betrachten alle möglichen Quader mit den Kantenlängen x, y und z und dem konstanten Volumen V. Gesucht ist der Quader mit der kleinsten Oberfläche.

   (a) Drücken Sie die Oberfläche A eines Quaders durch x, y und V aus.

   (b) A kann als Funktion von x mit dem Parameter y aufgefasst werden, d.h. $A = A_y(x)$. Für welches $x = x_y$ ist $A_y(x)$ minimal?

   (c) Die Funktion $F(y)$ ist definiert durch $F(y) = A_y(x_y)$. $F(y)$ ist also die Oberfläche des Quaders mit der Kante y, dessen Oberfläche minimal ist. Den Quader mit der insgesamt kleinsten Oberfläche bei gegebenem Volumen V findet man durch Minimieren von F. Um welchen Quader handelt es sich dabei?

2. Zerlegen Sie die positive Zahl a so in eine Summe, dass das Produkt der beiden Summanden maximal wird.

3. **Warum Lastwagenfahrer so rasen**

   Die Kosten für eine Lastwagenfahrt setzen sich aus den Benzinkosten und dem Fahrerlohn zusammen. Der Benzinverbrauch pro km ist die Summe aus einem konstanten Term a (Rollreibung) und einem zum Geschwindigkeitsquadrat proportionalen Term bv^2 (Luftwiderstand). Der Fahrerlohn F ist natürlich zur Fahrzeit t proportional, d.h. $F = ct$.

   (a) Drücken Sie die Gesamtkosten G für eine Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit v über die Strecke s durch a, b, c, s, v und den Benzinpreis B pro Liter aus.

   (b) Für welche Geschwindigkeit v_0 sind die Gesamtkosten minimal?

   (c) Als konkretes Beispiel betrachten wir eine Fahrt über $s = 100\,\text{km}$ mit den Daten

   $$a = 0{,}04\,\frac{\text{Liter}}{\text{km}}, \quad b = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Liter}\,\text{h}^2}{\text{km}^3}, \quad c = 80\,\frac{\text{DM}}{\text{h}} \quad \text{und} \quad B = 2\,\frac{\text{DM}}{\text{Liter}}.$$

   Berechnen Sie v_0 und den minimalen Gesamtpreis G_0. Zeichnen Sie $G(v)$ im Intervall zwischen 0 und $300\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

4. Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf der Funktion $f(x) = a - |x|^n$ mit $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Eine Parallele zur x-Achse im Abstand d mit $0 \leqq d \leqq a$ schneidet G_f in A und B (A links von B). Für welches $d = d_0$ ist die Fläche F des Dreiecks AOB maximal, wobei O den Ursprung des Koordinatensystems bezeichnet?

   Hinweis: Drücken Sie F durch die x-Koordinate von B aus!

Zusammengestellt von OStR M. Ziemke für Landrat-Lucas-Gymnasium, Leverkusen