Lösungen zu Extremwertaufgaben I

1. (a) $t = \frac{s_1 + s_2}{c} = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{(l - x_1)^2 + y_2^2}}{c}$

   $0 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x_1} = \frac{x_1}{cs_1} - \frac{x_2}{cs_2} = \frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{c} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

   (b) $t = \frac{s_1 n_1}{c} + \frac{s_2 n_2}{c} = \frac{n_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{c} + \frac{n_2\sqrt{(l - x_1)^2 + y_2^2}}{c}$

   $0 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x_1} = \frac{n_1 x_1}{cs_1} - \frac{n_2 x_2}{cs_2} = \frac{n_1 \sin\alpha_1 - n_2 \sin\alpha_2}{c} \Longrightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$

2. (a) $V = r^2\pi h \Rightarrow h(r) = \frac{V}{r^2\pi} \Rightarrow A(r) = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}$
   $A'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.
   Da $A(0) = \infty$ und $\lim\limits_{r\to\infty} A(r) = \infty$ handelt es sich hierbei um ein Minimum.

   (b) $A = 2r\pi(r + h) \Rightarrow h(r) = \frac{A}{2r\pi} - r \Rightarrow V(r) = \frac{1}{2}Ar - r^3\pi$
   $V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$.
   Aus einer Grenzwertbetrachtung von $V(r)$ schließt man auf ein Maximum.

3. $p(x) = x(15 - x) \Rightarrow p'(x) = 15 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 7{,}5$
   Maximum, da der Graph von $p(x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist.

4. $b = 2c, a = 30 - 3c \Rightarrow V(c) = (30 - 3c) \cdot 2c \cdot c$
   $V'(c) = 120c - 18c^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0, c_2 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$
   Maximum, da $V'(6) > 0$ und $V'(7) < 0$.

Zusammengestellt von OStR M. Ziemke für Landrat-Lucas-Gymnasium, Leverkusen