Lösungen zu Extremwertaufgaben III

1. (a) $P(2|0)$, $Q(r\cos\varphi|r\sin\varphi)$, $R(-r\cos\varphi|r\sin\varphi)$, $S(-2|0)$

   (b) $A(\varphi) = 4(1+\cos\varphi)\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 90°]$

   (c) $A(30°) = 3{,}732$, $A(45°) = 4{,}828$, $A(60°) = 5{,}196$, $A(90°) = 4$

   (d) $$\begin{aligned} A'(\varphi) &= 4(\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 4(\cos\varphi + \cos(2\varphi)) \\ &= 8\cdot\cos(\tfrac{3}{2}\varphi)\cdot\cos(\tfrac{1}{2}\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 60° \end{aligned}$$

2. (a)

   (b) $A(\varphi) = \cos\varphi\cdot(1+\sin\varphi)$, $\varphi \in [-90°; 90°]$

   (c) $$\begin{aligned} A'(\varphi) &= -\sin\varphi\cdot(1+\sin\varphi) + \cos^2\varphi \qquad \Leftrightarrow \\ &= -\sin\varphi - \sin^2\varphi + 1 - \sin^2\varphi \\ &= 1 - \sin\varphi - 2\sin^2\varphi = (1-2\sin\varphi)(1+\sin\varphi) = 0 \end{aligned}$$
   1. Fall: $\sin\varphi = -1$. Für $\sin\varphi = -1$ folgt $A(\varphi) = 0$, also kein Maximum!
   2. Fall: $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ ($\Leftrightarrow \varphi = 30°$!).
   Bei $\varphi = 30°$ liegt ein Maximum vor, da $A(0°) = 1$, $A(90°) = 0$ und $A(30°) = \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 1{,}299$.

3. (a) $b^2 + h^2 = d^2 \Rightarrow V(b) = b\cdot\sqrt{d^2-b^2}\cdot l$. Da das Volumen immer positiv ist, ist $V(b)$ genau dann maximal, wenn $V^2(b) = b^2\cdot(d^2-b^2)\cdot l^2$ maximal ist $\Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}d$. $\Rightarrow$ 64% des Baumes werden genutzt.

   (b) $bh^2 = b\cdot(d^2-b^2)$ ist maximal, wenn $b = \frac{1}{\sqrt{3}}d \Rightarrow$ 60% des Baumes werden genutzt.

Zusammengestellt von OStR M. Ziemke für Landrat-Lucas-Gymnasium, Leverkusen