Lösungen zu Extremwertaufgaben IV

1. (a) $W(Z) = (m_p - m_n)c^2 Z + m_n A c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{\frac{2}{3}} + \beta \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \eta \frac{(A-2Z)^2}{A}$

   (b) $W'(Z) = -\alpha + Z\left(\frac{2\beta}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{8\eta}{A}\right) - 4\eta \Rightarrow$
   minimale Bindungsenergie für

$$Z = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha}{4\eta}}{1 + \frac{\beta}{4\eta} A^{\frac{2}{3}}} = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + 9 \cdot 10^{-3}}{1 + 7{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot A^{\frac{2}{3}}}$$

   (c) Für kleine A erhält man etwa gleich viele Neutronen und Protonen. Je größer A ist, umso mehr weicht die Protonenzahl von $\frac{A}{2}$ ab (kleiner).
   TIP: $Z(A)$ und $\frac{A}{2}$ mit Funktionsplotprogramm zeichnen!

2. (a) Schwerpunkt jeweils bei $\frac{H}{2}$ (H: Dosenhöhe)

   (b)

$$S(h) = \frac{m_D \frac{H}{2} + m_L \frac{h}{H} \frac{h}{2}}{m_D + m_L \frac{h}{H}} = \frac{m_D H^2 + m_L h^2}{2 m_D H + 2 m_L h}$$

   $S'(h) = 0 \Leftrightarrow m_L h^2 + 2 m_D H h - m_D H^2 = 0 \Leftrightarrow$
   $h = \frac{1}{m_L}\left(-m_D H \pm H\sqrt{m_D(m_D + m_L)}\right)$
   Da der Term unter der Wurzel größer als m_D ist und für h nur positive Werte sinnvoll sind, folgt

$$h = \frac{1}{m_L}\left(-m_D H + H\sqrt{m_D(m_D + m_L)}\right)$$

   (c) $h = 0{,}28989H = 4{,}6\,\mathrm{cm}$

3. Bei einem zylindrischen Turm ist eine Querschnittsfläche, die um den Winkel ϕ gegen die Horizontale geneigt ist eine Ellipse mit der Fläche $\frac{r^2\pi}{\cos\phi}$. Die Kraft parallel zur Fläche beträgt $F_0 \sin\phi$ (F_0 ist die Gewichtskraft des abrutschenden Teils).
   $\Rightarrow \sigma = \frac{F_0}{r^2\pi} \sin\phi \cos\phi$
   σ ist bei festem F_0 und $r^2\pi$ für den Winkel $\phi = 45°$ maximal.

4. (a) $a + b = c = \text{konst} \Longrightarrow a \cdot b = ac - a^2 = f(a)$
   1. Lösungsweg: $f'(a) = c - 2a = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}c$, $f''(a) = -2 < 0$
   Also: Produkt maximal für $a = \frac{1}{2}c$
   2. Lösungsweg: $f(a)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel $\Longrightarrow f(a)$ maximal am Scheitel $(\frac{1}{2}c | \frac{1}{4}c^2)$

   (b) $a \cdot b = c = \text{konst} \Longrightarrow a + b = a + \dfrac{c}{a} = f(a)$
   $f'(a) = 1 - \frac{c}{a^2} = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{c}$, $f''(a) = 2\dfrac{c}{a^3}$
   1. Fall: $c > 0$, d. h. a und b haben gleiches Vorzeichen.
   Für $a, b > 0$ ist $f''(a) > 0$ und damit erhält man für $a = b = \sqrt{c}$ ein Minimum. Für

$a, b < 0$ ist $f''(a) < 0$ und damit erhält man für $a = b = -\sqrt{c}$ ein Maximum.
2. Fall: $c < 0 \Longrightarrow f'(a) > 1$, also kein Extremum.

Zusammengestellt von OStR M. Ziemke für Landrat-Lucas-Gymnasium, Leverkusen