Lösungen zu Extremwertaufgaben V

1. Mit $m = \overline{\mathrm{SM}} > 0$ und $n = \overline{\mathrm{SN}} > 0$ folgt $A = \dfrac{1}{2} mn \sin\alpha \Longrightarrow$
   $mn = \dfrac{2A}{\sin\alpha}$ und $m = \dfrac{2A}{n\sin\alpha}$.
   $\overline{\mathrm{MN}}^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha = \dfrac{4A^2}{n^2\sin^2\alpha} + n^2 - \dfrac{4A}{\tan\alpha} = f(n)$
   $f'(n) = 0 \Longleftrightarrow n^4 = \dfrac{4A^2}{\sin^2\alpha} \Longrightarrow n = \sqrt{\dfrac{2A}{\sin\alpha}},\ m = \sqrt{\dfrac{2A}{\sin\alpha}}$

2. $l = a + b$. Die Dreiecksfläche $A = ab\sin\alpha$ ist bei festem a und b maximal, wenn die Teilstücke einen Winkel von 90° einschließen. $\Rightarrow A(a) = ab = al - a^2$
   1. Lösungsweg: $A'(a) = l - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}l$, $A''(a) = -2 < 0$, also Maximum für $a = b = \frac{1}{2}l$
   2. Lösungsweg: $A(a)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Damit wird das Maximum am Scheitel $(\frac{1}{2}l|\frac{1}{4}l^2)$ angenommen.
   3. Lösungsweg: Das Produkt zweier Zahlen mit konstanter Summe ist maximal, wenn die zwei Zahlen gleich groß sind.

3. $V(x) = x\cdot(8-2x)\cdot(5-2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x \Rightarrow$
   $V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 0$ für $x_1 = 3\frac{1}{3}, x_2 = 1$
   $V''(3\frac{1}{3}) > 0$, also Minimum bei $x_1 = 3\frac{1}{3}$
   $V''(1) < 0$, also Maximum bei $x_2 = 1$

4. Seitenlängen des Rechtecks: a, $b \Longrightarrow A = ab \Longrightarrow d^2(a) = a^2 + \dfrac{A^2}{a^2}$
   Minimum von d^2 bei $(\sqrt{A}, 2A) \Longrightarrow$ Minimum für $a = b = \sqrt{A}$, d.h. Quadrat

5. $$d(x) = \sqrt{\left(3 - \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}\right)^2 + (0-x)^2}$$
   gibt den Abstand eines Punktes $\mathrm{A}(x|f(x))$ von P an. $d(x)^2$ und damit auch $d(x)$ (da $d(x) \geq 0$) hat nur ein Minimum bei P(0|1).

6. $U(x) = 2\,x + \dfrac{2\,A}{x}$, $\quad U'(x) = 2 - \dfrac{2\,A}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y = \sqrt{A}$

7. Mantelfläche: $A(r) = r\,s\,\pi = \sqrt{r^4\,\pi^2 + \dfrac{9\,V^2}{r^2}}$
   $A(r)$ minimal $\Longleftrightarrow g(r) = r^4\,\pi^2 + \dfrac{9\,V^2}{r^2}$ minimal
   $g'(r) = 4\,\pi^2\,r^3 - \dfrac{18\,V^2}{r^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{3\,V}{\pi\sqrt{2}}}$
   $g''(r) = 12\,\pi^2\,r^2 + \dfrac{54\,V^2}{r^4} > 0 \quad \Longrightarrow \quad A$ hat bei r_0 ein Minimum.

$h_0 = \dfrac{3\,V}{r_0^2\,\pi} = r_0\,\sqrt{2}$

8. (a) $r(x) = \left(1 + \dfrac{b}{x}\right)\sqrt{a^2 + x^2}$, $r'(x) = \dfrac{x^3 - b\,a^2}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

$r'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 = a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{1}{3}}$

$r'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $r'(x) > 0$ für $x > x_0 \quad \Longrightarrow \quad$ rel. Min. von r bei x_0.

$L = r(x_0) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

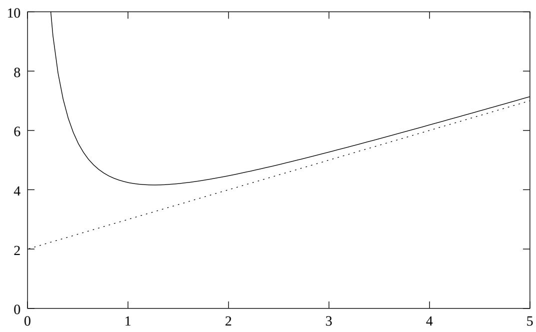
(b)

$$\begin{aligned} a = b \quad &\Longrightarrow \quad L = 2\,a\,\sqrt{2} \\ a \ll b \quad &\Longrightarrow \quad L \approx b \\ b = 2\,a \quad &\Longrightarrow \quad L \approx 4{,}16\,a \end{aligned}$$

(c) $r(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\sqrt{1 + x^2} = (x+2)\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left[r(x) - (x+2)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[(x+2)\cdot\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x+2}} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{x^3\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 0$$



Zusammengestellt von OStR M. Ziemke für Landrat-Lucas-Gymnasium, Leverkusen