Lösungen:

zu a) Abschnittsweise Definition des Funktionstermes f(t) der Änderungsfunktion:

zu a1) für $-50 \le t < 0$: Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt S(0/12)

Der Ansatz über die Scheitelpunktform liefert $f(t) = a \cdot (t-0)^2 + 12 = at^2 + 12$.

Die Nullstelle liefert $f(-50) = 0 \Rightarrow a \cdot (-50)^2 + 12 = -2500a + 12 = 0 \Rightarrow a = -\frac{12}{2500} = -\frac{3}{625}$

Alternativ: Die Aussagen zu S(0/12) und x_N=-50 liefern f(0)=12 und f '(0)=0 und f(-50)=0, die Koeffizienten des LGS zu den Bedingungsgleichungen werden im GTR-Matrix-Editor eingetragen und mit II.Matrix MATH B:rref() erhält man die Lösung a=-3/625 und b=0 und c=12.

Also ist $f(t) = -\frac{3}{625}t^2 + 12 \;\; für \; -50 \le t < 0$.

zu a2) für $0 \le t < 25$: Graph ist eine Gerade parallel zur x-Achse mit Abstand 12

Also ist $f(t) = 12 \;\; für \; 0 \le t < 25$.

zu a3) für $25 \le t < 75$: Graph einer Funktion 3. Grades mit Extrempunkten an den Bereichsgrenzen

Die Aussagen zu H(25/12) und H(75/0) liefern f(25)=12 , f '(25)=0 , f(75)=0 und f '(75)=0 .

Die Bedingungsgleichungen dazu sind $25^3a + 25^2b + 25c + d = 12$ und $3*25^2a + 50b + c = 0$ sowie $75^3a + 75^2b + 75c + d = 0$ und $3*75^2a + 150b + c = 0$ und zwei hinreichende Bedingungen.

Die zugehörigen Koeffizienten des LGS werden im GTR-Matrix-Editor eingetragen und mit II.Matrix MATH B:rref() erhält man die Lösung $a=1{,}92*10^{-4}$ und b=-18/625 und c=27/25 und d=0.

Also ist $f(t) = -1{,}92 \cdot 10^{-4} t^3 - \frac{18}{625}t^2 + \frac{27}{25}t \;\; für \; 25 \le t < 75$.

Die hinreichenden Prüfungen f ''(25)<0 und f ''(75)>0 bewahrheiten sich.

zu b) Interpretation der Graphenpunkte im Kontext:

Im Punkt A(0/12) ist der progressive Teil des Steigfluges (Phase des beschleunigten Steigens) beendet: Nun folgt ein kontinuierliches Steigen bis zum Punkt B(25/12). Ab dem Zeitpunkt t=25 verlangsamt sich das Steigen allmählich bis zum Zeitpunkt t=75 im Punkt C(75/0). Nun ist die maximale Flughöhe erreicht.

zu c) Berechnung der erreichten Flughöhe zum Zeitpunkt t=75:

Die relative Flughöhe wird mit der Summe der drei Teilintegrale berechnet:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_{-50}^{0} f + \int_{0}^{25} f + \int_{25}^{75} f = 400 + 300 + 300 = 1000 \;\; \text{(mit GTR und II.Calc 7:Int-f(x)dx)}$$

Die absolute Höhe ha über NN beträgt zum Zeitpunkt t=75 dann ha = 1250+1000 = 2250 zu d) Fortsetzung des Änderungsgraphen: Sinkflug und Landung 400m tiefer als maximale Flughöhe, Berechnung der maximalen Sinkrate für zwei unterschiedliche Landungszeiträume.

zu d1).Der Graph soll an beiden Hochpunkten die x-Achse berühren, die Fläche zwischen Graph und x-Achse das Maß A=1000-400=600 haben.
Im Anwendungsproblem sind w=115-75=40 [w=150-75=75], A=600 (also i=-600) und die F1-Nullstellen -20 und 20 (also n=20) [bzw. -75/2 und 75/2 (also n=75/2)]

zu d2) Mit Linearfaktoransatz wegen der beiden bekannten doppelten Nullstellen ist dann der gesuchte allgemeine Term $f_1(x) = a\cdot(x-n)^2\cdot(x+n)^2 = a\cdot(x^2-n^2)^2$, wobei a der Streckfaktor ist, der nun über die Integralbedingung ermittelt wird:

$$\int_{-n}^{n} f_1 = i = \int_{-n}^{n}\left(a\cdot\left(x^4-2n^2x^2+n^4\right)\right)dx = a\cdot\int_{-n}^{n}\left(x^4-2n^2x^2+n^4\right)dx$$

$$= a\cdot\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}n^2x^3+n^4x\right]_{-n}^{n} = a\cdot\left(\frac{1}{5}n^5-\frac{2}{3}n^5+n^5-0\right) = \frac{8}{15}an^5 = i \Rightarrow a = \frac{15\cdot i}{16\cdot n^5}$$

Konkret für die geforderten w und i gilt dann für den Streckfaktor a in f1(x)

$$(1)\ w=40 \wedge i=-600 \Rightarrow a = -\frac{15\cdot 600}{16\cdot 20^5} = -\frac{3\cdot 75}{8\cdot 20^4} \approx -1{,}7578\cdot 10^{-4}$$

$$(2)\ w=75 \wedge i=-600 \Rightarrow a = -\frac{15\cdot 600}{16\cdot\left(\frac{75}{2}\right)^5} = -\frac{15\cdot 8\cdot 75\cdot 2^5}{2^4\cdot 75^5} = -\frac{15\cdot 8\cdot 2}{5\cdot 15\cdot 75^3} = -\frac{16}{5\cdot 75^3} \approx -7{,}5852\cdot 10^{-6}$$

zu d3) Die notwendige Verschiebung nach rechts liefert den Term $f(t) = f_1(x-75-\frac{w}{2})$

für w=40 folgt: $f(t) = -1{,}7578\cdot 10^{-4}\cdot\left(t^2-190t+8625\right)^2$

Stärkste Sinkrate bei $t = 75+20$ mit $f(95) = f_1(0) = -28{,}125$

für w=75 folgt: $f(t) = -7{,}5852\cdot 10^{-6}\cdot\left(t^2-225t+11250\right)^2$

Stärkste Sinkrate bei $t = 75+{}^{75}\!/_{2}$ mit $f(112{,}5) = f_1(0) = -15$

Der gesamte Änderungsraten-Graph G(f) zu w=75 (also 75 Minuten Sinkflug bis zur Landung):